UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
CONSEJO DE FACULTAD

RESOLUCIÓN Nº 021-2022 CF/FCE

Bellavista, 02 de febrero de 2022

VISTO:

La carta presentada por el docente Dr. EDGAR LOPEZ SALVATIERRA, donde remite la separata CURVAS DE NIVEL EN LA ECONOMÍA, aprobada con resolución N°277-2021-CF/FCE de acuerdo a la Directiva para la Elaboración de guias y/o separata de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Callao.

CONSIDERANDO:

Que, el art. 47º del Estatuto de la Universidad Nacional del Callo, enmarcando en la Ley Universitaria – Ley 30220, establece las funciones de la Dirección de Escuela Profesional entre las que se detalla la gestión del desarrollo y cumplimiento de las actividades académicas, así como supervisar las actividades de tutoría, desarrollo estudiantil y emprendimiento, velando por si calidad académica profesional;

Que, constituyen materiales usados en el proceso de enseñanza – aprendizaje, las notas de clases Separatas, guías de prácticas, etc. preparados por los docentes y autorizados y visados por la unidad académica correspondiente.

Que, con Resolución N°130-2021-CF/FCE, se aprobó la DIRECTIVA PARA LA ELABORACION DE GUIAS Y/O SEPARATA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO.

Que, con citación a Consejo de Facultad N° 04-/2022, de fecha 31/01/2022, se convocó a sesión extraordinaria para el día 01/02/2022 a las 15 horas, y en el punto de agenda Nº 03 se consideró lo siguiente "APROBACIÓN DE LAS SEPARATAS CURVAS DE NIVEL EN LA ECONOMÍA, APROBADA CON RESOLUCION N°277-2021-CF/FCE.

Estando a lo acordado, el Consejo de Facultad, en su sesión extraordinaria del 01 de febrero de 2022, y al amparo de las atribuciones conferidas por el Art. Nº 189.2 del Estatuto de la Universidad Nacional del Callao.

RESUELVE:

1. Aprobar la separata denominada "CURVAS DE NIVEL EN LA ECONOMÍA", presentada por el docente Dr. Edgar López Salvatierra002E

2. Solicitar que Oficina de Publicaciones y Marketing en coordinación con la Oficina de Tecnología de la Información y Comunicaciones de la Facultad, realice la diagramación y la respectiva publicación en los diferentes medios tecnológicos, para conocimiento del alumnado.

3. TRANSCRIBIR la presente Resolución al Rector y demás dependencias Administrativas para que alcance su objeto.

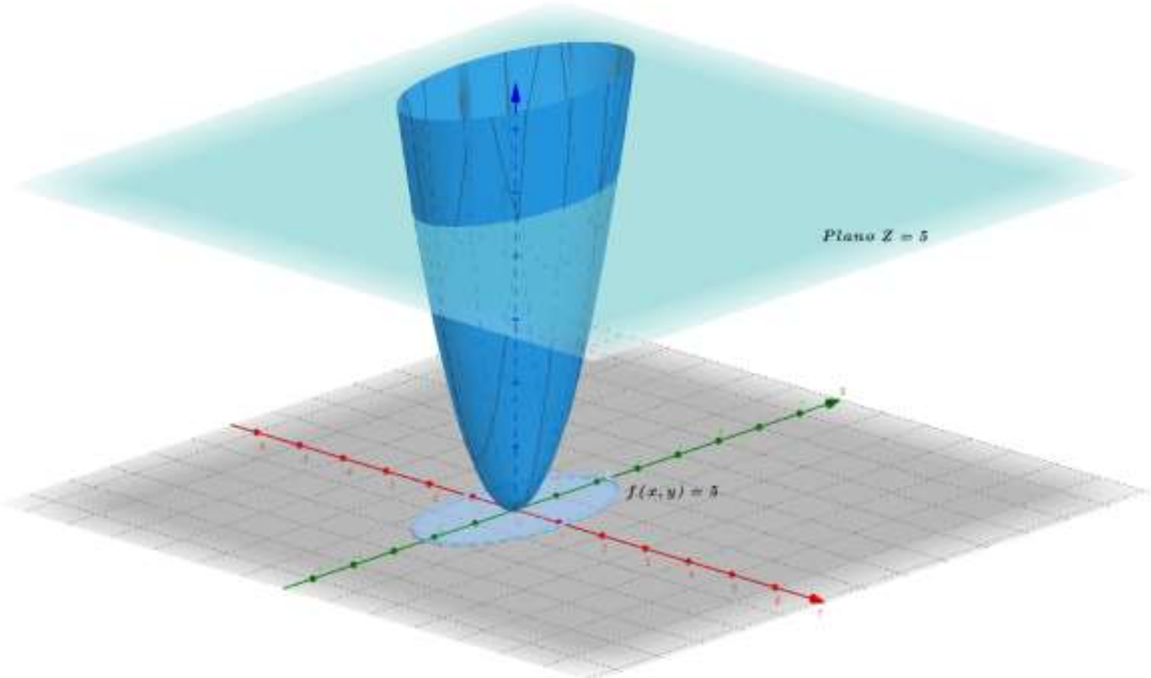
Regístrese, comuníquese y archívese

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

AUGUSTO CARO ANCHAY
DECANO

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS

CURVAS DE NIVEL EN LA ECONOMÍA



1era. versión

Edgar López Salvatierra

A:

Rubén Arbañil Rivadeneyra

Excelente Profesor.

Mejor Persona.

PRESENTACION

La presente publicación, denominada “Curvas de nivel en la Economía”, versión 01, muestra la base teórica y geométrica, de las curvas de nivel, así como ejemplos ilustrativos de aplicación a la economía, en particular su incidencia a problemas de optimización con restricciones, los mismos que han sido parte de las clases impartidas en el curso de Matemática II, que se dictó en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Callao, correspondiente al semestre 2021-B.

Debo aclarar, que lo escrito en la presente publicación, es el resumen sobre el tema, de un compendio de diversos libros textos sobre cálculo, que se usan a nivel universitario y cuyos nombres de los autores, figuran en la parte final de esta separata, en la que corresponde a las referencias bibliográficas.

Quiero expresar mi agradecimiento, a los estudiantes de la Facultad de Ciencias Económicas, en particular al señor Antonio Brando Ayala Chuquimango, que nos apoyó en cuanto a las gráficas, teoría y ejercicios sobre las curvas de nivel, asimismo al M.Sc Charles López Vereau, que tuvo participación en la base teórica, para la elaboración de la presente publicación. Esperemos, que la presente separata, sirva a los estudiantes de economía, en cuanto a su formación académica y por ende profesional.

Edgar López Salvatierra

Callao, 11 de diciembre de 2021

INDICE

.

CAPITULO I.- NOCIONES BÁSICAS DE LAS CURVAS DE NIVEL.

1.1 Introducción. –

Para tener una idea intuitiva, de lo que es una curva de nivel, nos auxiliaremos de las imágenes, que representan parte de la ciudad universitaria de la Universidad Nacional del Callao.

Figura 1

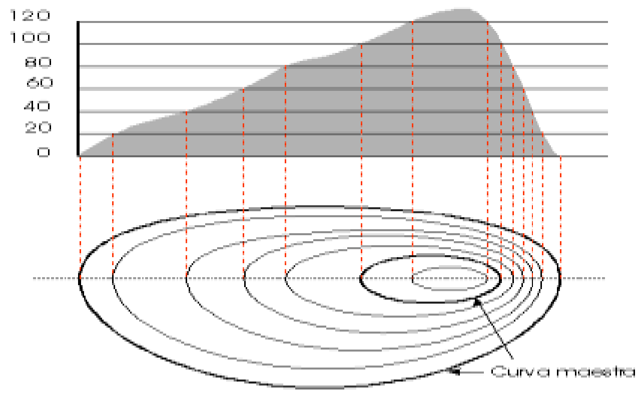
En esta imagen (Figura 1), se observa los edificios que son parte de la Biblioteca Central, la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, al fondo la Facultad de Ingeniería Ambiental y parte de la plaza principal.

Figura 2

En cuanto, a la siguiente imagen (Figura 2), se representa la misma imagen anterior (Figura 1), pero viendo desde una vista aérea, (De arriba hacia abajo). En la primera imagen, los geómetras dirían que las edificaciones están representadas en una perspectiva tridimensional o en 3-D, a diferencia de la segunda, que solo se observa la parte de los techos de las edificaciones, por tanto, éstas, están expresado en un sistema bidimensional (Plano).

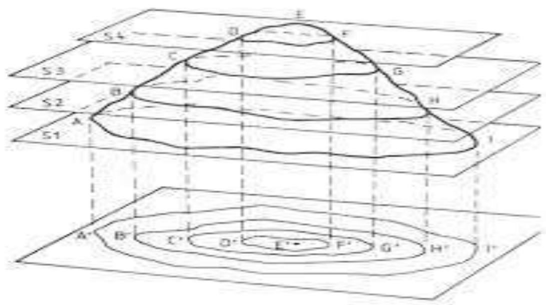
Adicionalmente a este ejemplo introductorio, podemos poner otro, que usan los topógrafos. En la Figura 3, se observa una montaña (Color, gris oscuro), si ésta, se observaría de una perspectiva área, se vería como una familia de curvas, que se puede apreciar en la parte inferior de la Figura 3.

Figura 3



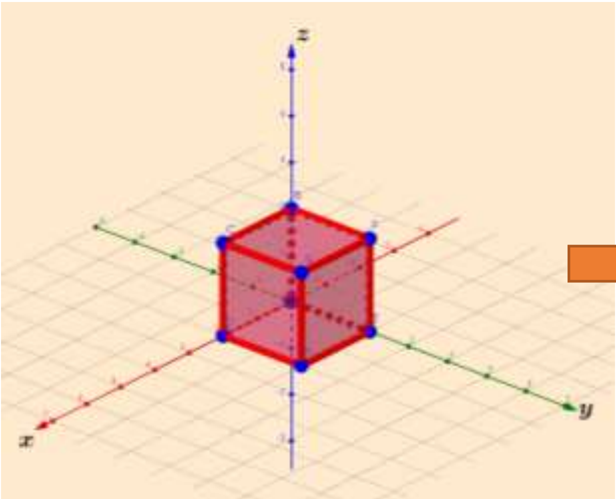
Agregando a estos ejemplos, podríamos poner otro, en el cual, se observa una montaña (Figura 4) que esta interceptada imaginariamente por cuatro planos paralelos, en cada uno de dichos planos, se va a reflejar un conjunto de curvas, que, proyectado hacia abajo, en un plano único, se observa la forma de una familia de curvas (los matemáticos lo llaman curvas de nivel).

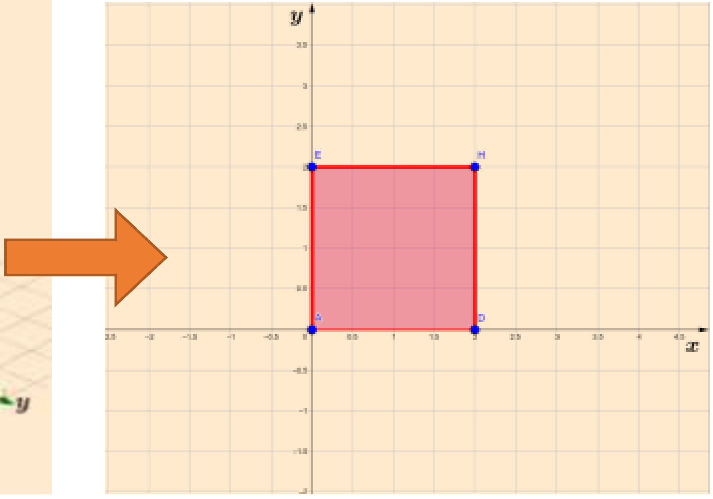
Figura 4



Con esta serie de ejemplos, lo que tratamos de indicar, es que un objeto trazado en tres dimensiones o 3D, es posible “Transformarlo” equivalentemente en una figura, graficada en dos dimensiones. Figura 5

Figura 5

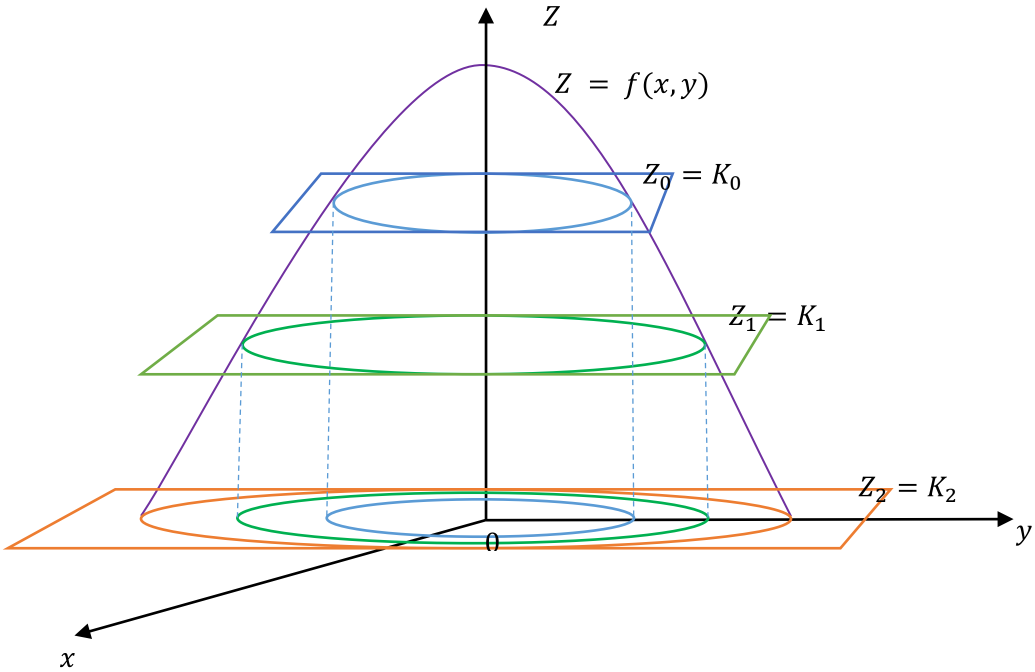




Sistema de coordenadas tridimensional → Sistema de coordenadas bidimensional

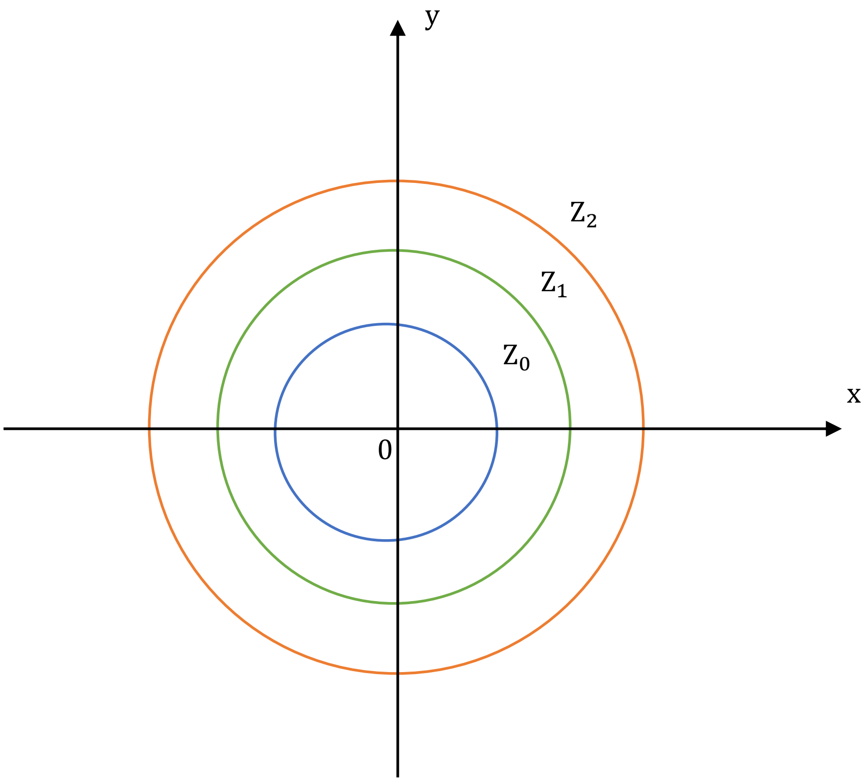
Teniendo como referencia, todo lo mencionado anteriormente, podemos tratar de formalizar, lo que es una curva de nivel, mediante un lenguaje formal; para esto, tomemos como referencia la Figura 6

Figura 6



Observamos, la gráfica de una superficie $z = f(x.y)$ que representa un paraboloide, graficado en un sistema de coordenadas tridimensional, ésta al ser interceptada por tres planos, en este caso etiquetado por $z_0 = k_0$; $z_1 = k_1$; $z_2 = k_2$, vemos que en dichos planos se refleja un conjunto de curvas, estas curvas al proyectarlo al plano xy, y vista de arriba hacia abajo, se ve como la gráfica de una familia de circunferencia, (Figura 7) cuya representación esta etiquetado por $z_0, z_1\, y\, z_2$. Este último bosquejo, es lo que se conoce como un mapa de curvas de nivel.

Figura 7



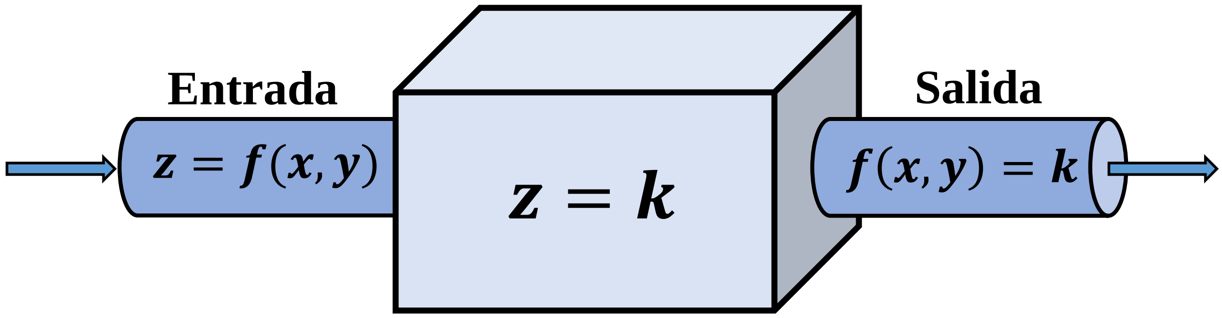
1.2 Definición de curvas de nivel. –

A estas alturas, ya estamos en condiciones de definir lo que es una curva de nivel. En general, como no es fácil, trazar gráficas de funciones de dos variables $z = f(x, y)$, por lo que, en ocasiones nos ayudamos de otras representaciones equivalentes, que nos permiten ver cómo es la relación entre las variables x, y, z. A estas representaciones se les denomina curvas de nivel, que es otro método, para representar una función de dos variables.

Como hemos visto, si la superficie $z = f(x, y)$, es intersectada por un conjunto de planos $z_0 = k_0$; $z_1 = k_1$; $z_2 = k_2$ (Figura 6) y la curva de intersección, se proyecta en el plano xy, su ecuación tiene la forma de $f(x, y) =$ k, donde k representa un valor numérico y puede tomar los valores de k_0 , k_1 y k_2 , a estas curvas, que tiene la forma de circunferencias se llaman curvas de nivel, (Figura 7), cuyos puntos (x, y) pertenece al dominio de $z = f(x, y)$,

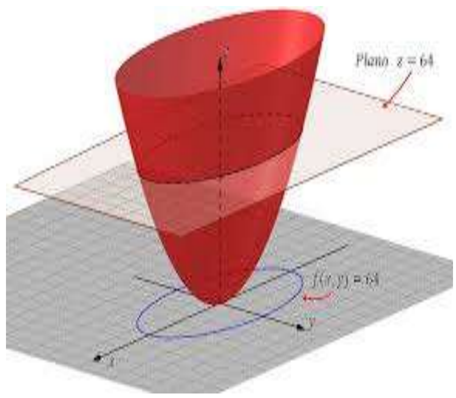
Resumiendo, para encontrar las curvas de nivel, debemos imaginar cortes con un plano a una superficie a distintos niveles de z; al cortar la superficie, las curvas resultantes son las curvas de nivel para distintos valores de k. Las curvas de nivel nos ayudan a representar relaciones con una entrada tridimensional y una salida bidimensional, como podemos apreciar, en el siguiente diagrama de lenguaje máquina o caja negra como también se le conoce (Figura 8).

Figura 8



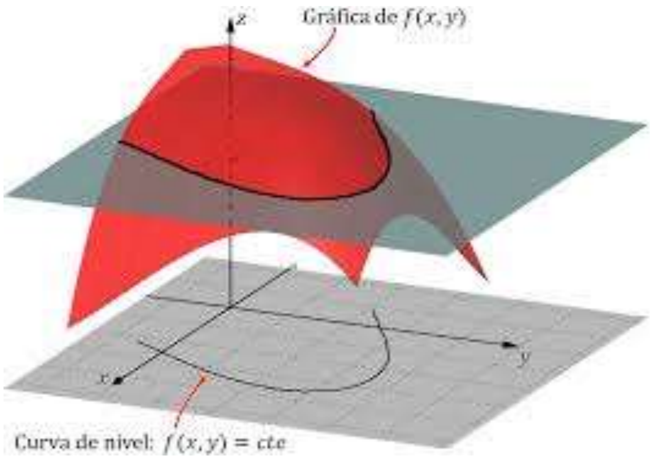
A continuación, mostramos otros ejemplos gráficos complementarios, sobre curvas de nivel, que se presentan en los estudios de matemática.

Figura 9



En la Figura 9, se observa una superficie de un paraboloide color naranja, interceptada (o cortada) por un plano de color naranja claro, a una altura de $z = 64$; en dicho plano, al cortar, se refleja una curva, que, al proyectarlo hacia abajo, en el plano xy, se observa una curva que geométricamente es una elipse; que representa a una curva de nivel.

Figura 10



Algo parecido al ejemplo anterior, se nota en la figura 10, donde una función $z = f(x, y)$ representada por una superficie de color naranja, es cortada por un plano de color verde, reflejándose en ésta, una curva, que al proyectarlo al plano xy, muestra la curva de nivel, representado por una parábola.

1.3.- Ilustraciones, de la relación de una superficie y las curvas de nivel.

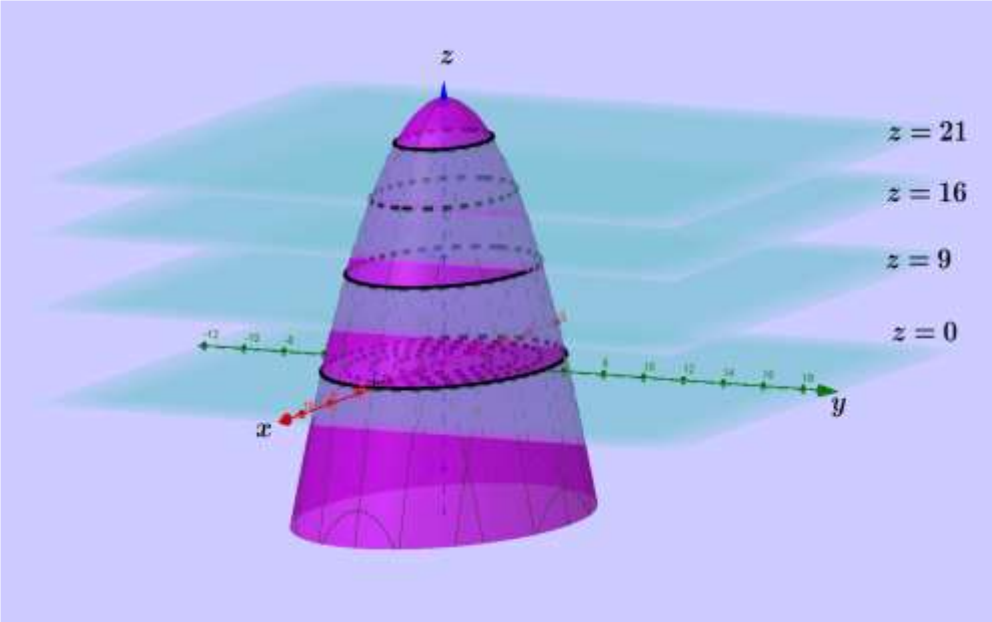
En esta parte de la separata, ilustraremos mediante ejercicios numéricos, la relación que guarda una superficie y la curva de nivel obtenida de ella; es decir cómo se relaciona una superficie $z = f(x, y)$, cuando es interceptada por un plano $z = k$, de forma, que $k = f(x, y)$ es la representación de las curvas de nivel. A continuación, mostramos algunos ejemplos de corte matemático.

1.- Ejemplo: Dibujar la curva de nivel para la superficie $z = 25 - x^2 - y^2$, Si $k = 21,\ 16,\ 9,\ 0$

Solución: Primero, graficamos[1] la superficie, el cual será interceptada por el plano $z = k$. Donde k toma los valores, según el enunciado: 21, 16, 9, 0, como se ve en la Figura **11.**

[1] Hemos usado el aplicativo GeoGebra. Ver en anexo, ésta y algunas otras figuras, de la presente publicación, las entradas para obtener la gráfica e identifique por el número de la Figura.

Figura 11



El resultado de estas intersecciones, se refleja en cada plano, curvas que son representados por circunferencias de color negro (Parece una elipse en el dibujo, pero en realidad son circunferencias). Formalmente estas circunferencias se pueden representar en el plano xy, para lo cual asignamos valores para, k=21, 16, 9, 0 en la función de la superficie:

$$z = 25 - x^2 - y^2$$

Como $z = k$, entonces: $x^2 + y^2 = 25 - k$

Reemplazando los sucesivos valores de k , en esta última relación.

Cuando $z = 21$; $se\ tiene$ $x^2 + y^2 = 2^2$

Cuando $z = 16$; $se\ tiene$ $x^2 + y^2 = 3^2$

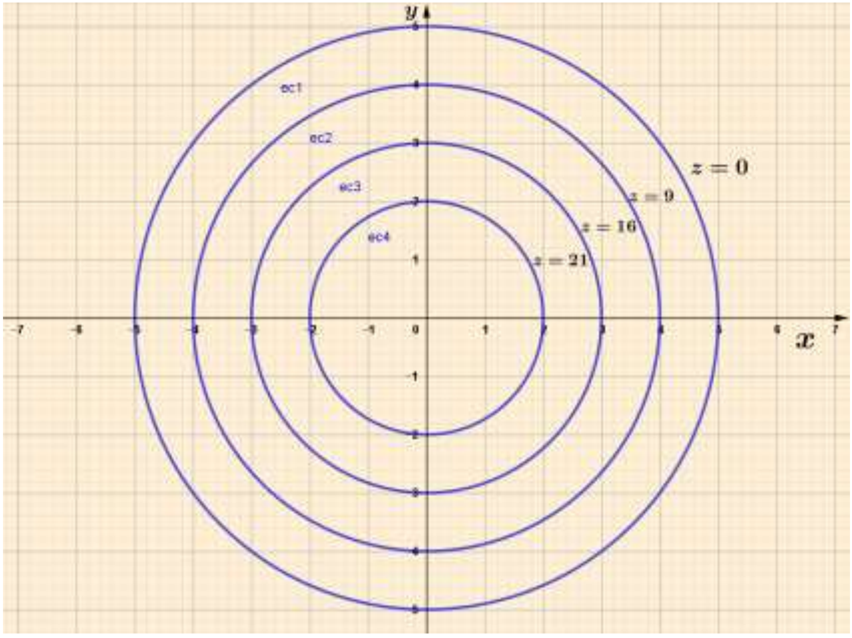
Cuando $z = 9$; $se\ tiene$ $x^2 + y^2 = 4^2$

Cuando $z = 0$; $se\ tiene$ $x^2 + y^2 = 5^2$

Graficando cada uno de estas ecuaciones, en el plano xy, que geométricamente representa una familia de circunferencia, cuyos radios r son: 2, 3, 4 y 5 respectivamente, como se observa en la Figura 12

.

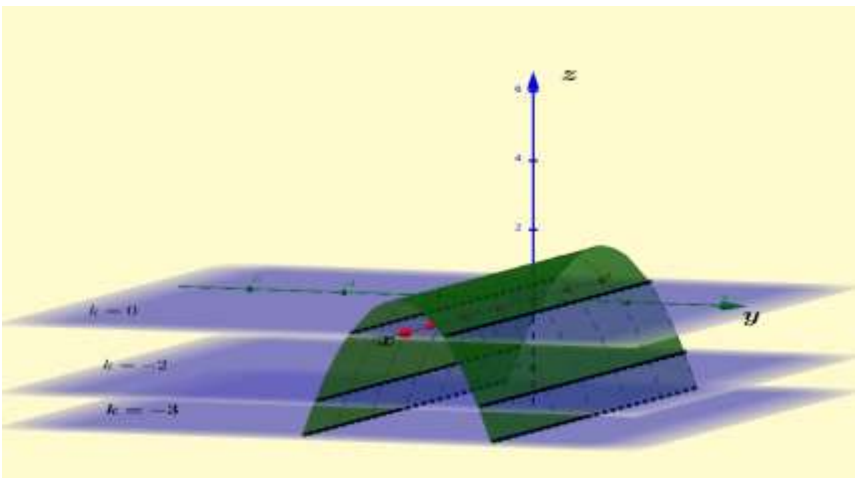
Figura 12



<u>2. Ejemplo</u>: Sea la superficie cuadrática $z = 1 - y^2$, trazar su gráfica y un mapa de nivel, mostrando las curvas de nivel para $k: 0\ , -2\ , -3$

<u>Solución</u>: usando la traza vertical, $x = 0$ graficamos parte de la superficie, en este caso está representado por la parábola: $z = 1 - y^2$ y luego, arrastramos la parábola en dirección del eje x, obteniendo la gráfica de la superficie, (Figura 13), que será cortada por los planos $z = 0\,; z = -2\,; z = -3$, cuyo resultado son rectas, que proyectadas al plano xy, resultan la familia de rectas (mapa de curvas de nivel o de contorno) que se observa gráficamente en la Figura 14.

Figura 13



Graficando las rectas de nivel; para eso, en la superficie cuadrática $z = 1 - y^2$, reemplazamos $z = k$, obteniéndose:

$$k = 1 - y^2$$

Luego:

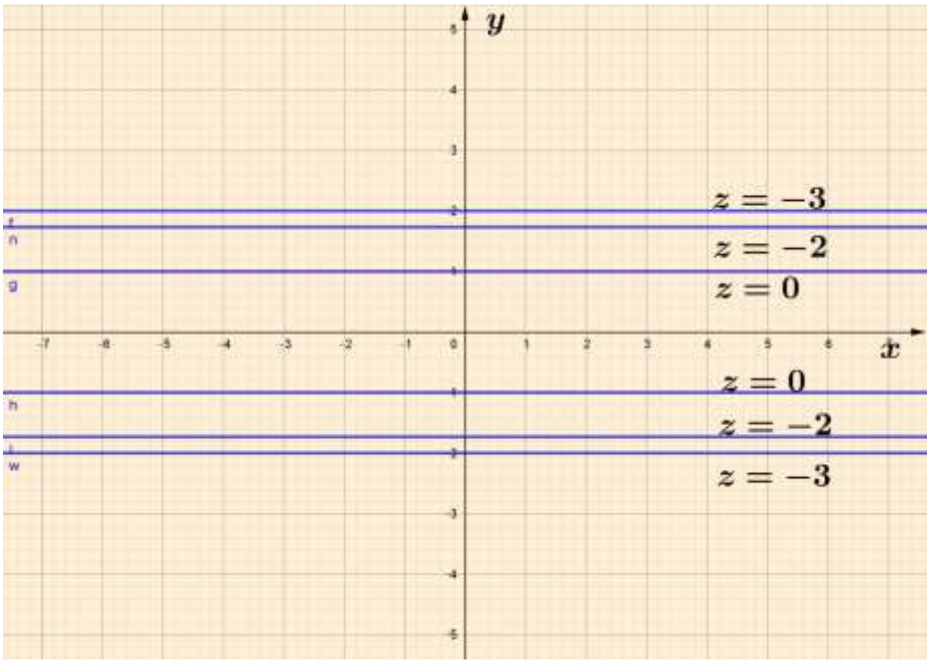
$$Si \quad k = 0 \quad , \quad y = \pm 1$$

$$Si \quad k = -2 \quad , \quad y = \pm\sqrt{3}$$

$$Si \quad k = -3 \quad , \quad y = \pm 2$$

Cuya gráfica, se observa en la Figura 14

Figura 14



3. <u>Ejemplo</u>: Sea la superficie cuadrática $z = x^2 + y^2$, trazar su gráfica y un mapa de contorno, mostrando las curvas de nivel para $k: 2\ , 4$

<u>Solución</u>: usando el aplicativo GeoGebra, graficamos la superficie, que en este caso es un paraboloide circular de color lila, (Figura 15) que será cortada por los planos $z = 2\ ; z = 4$, cuyo resultado son circunferencias de color negro, que proyectadas al plano xy, resultan la familia de circunferencias (mapa de contorno) que se observa gráficamente en la Figura 16

Figura 15

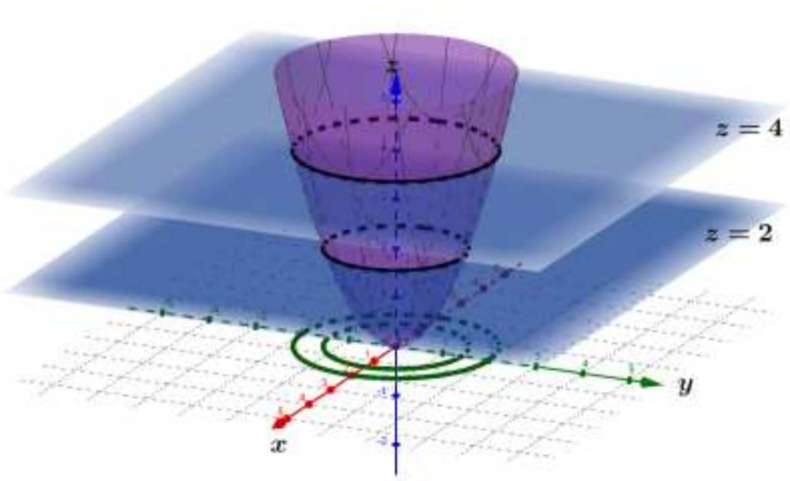
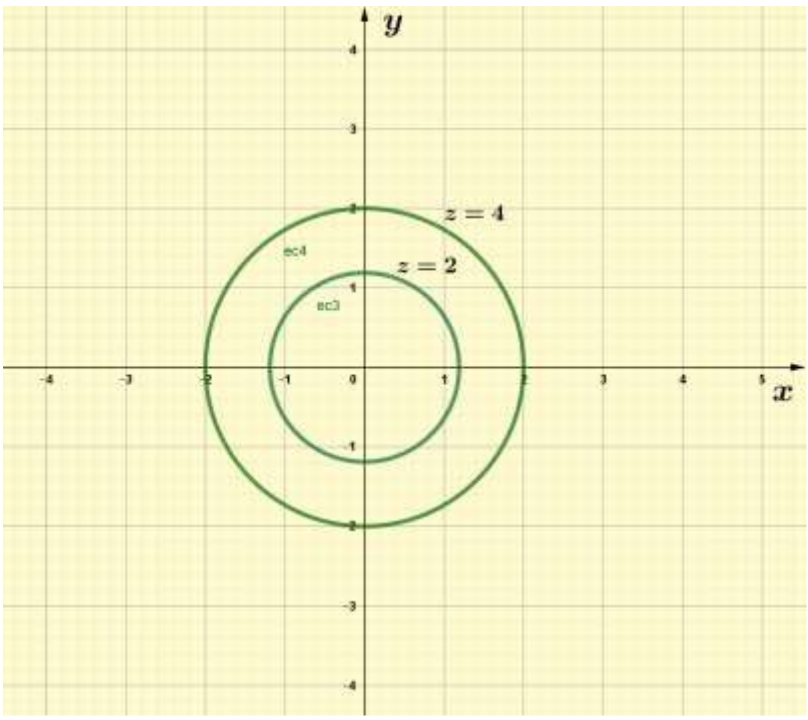


Figura 16



1.4 Representación gráfica, solo de curvas de nivel. -

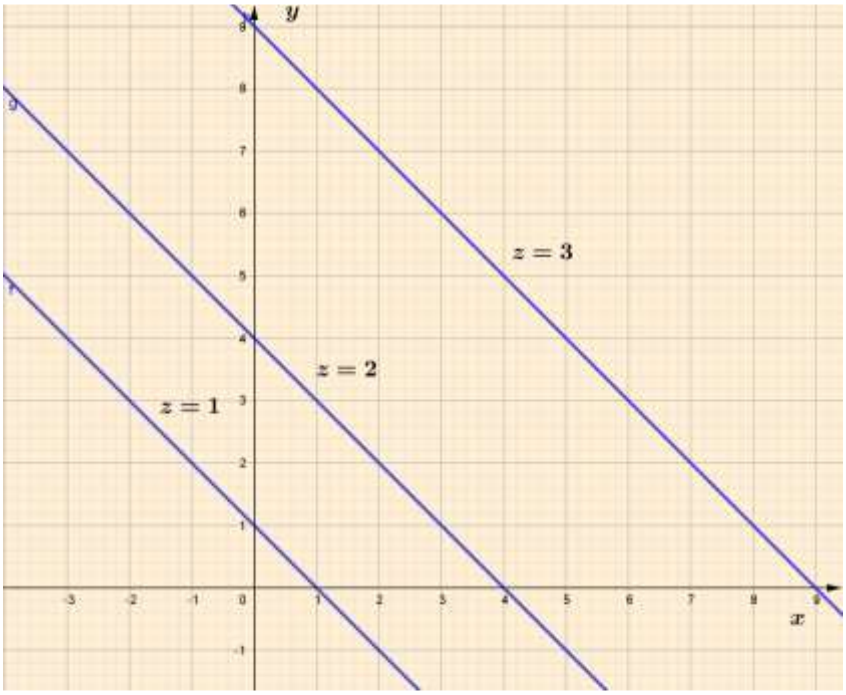
En el subcapítulo 1.3, hemos visto cómo se relaciona una superficie con su curva de nivel; ahora, solo nos concentraremos, en determinar solo las curvas de nivel, así como su gráfica. A continuación, mostraremos algunos ejemplos ilustrativos sobre curvas de nivel, usando el aplicativo GeoGebra.

1.- Ejemplo. - Hallar las curvas de nivel para la función:

$$f(x,y) = \sqrt{x+y} \quad ; \quad \text{Para k=1 , 2 , 3}$$

Solución: Activando el programa GeoGebra, obtenemos la siguiente familia de rectas, que representan las rectas de nivel, para la función dada y para los valores de $k = 1$; $k = 2$; $k = 3$. Figura 17.

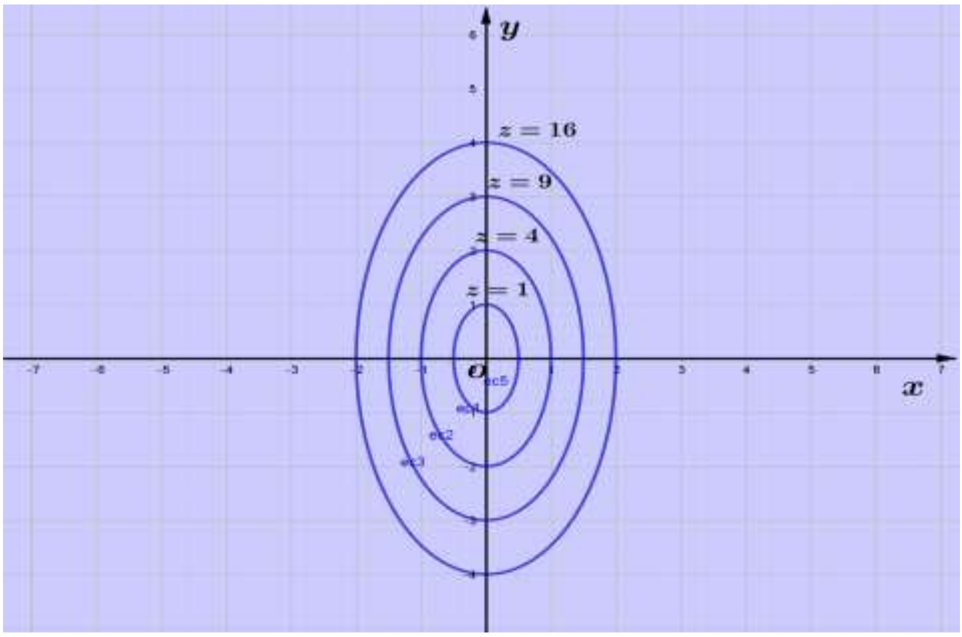
Figura 17



2.- Ejemplo. - Determinar las curvas de nivel, para la ecuación: $z = 4x^2 + y^2$; Si k: 0 , 4 , 9 , 16

Solución: Igualmente, como el ejemplo anterior, usaremos el programa GeoGebra, para hallar las curvas de nivel, previamente, haciendo $z = k$. En la Figura 18 se observa, la familia de elipses, que representan las curvas de nivel de la superficie propuesta.

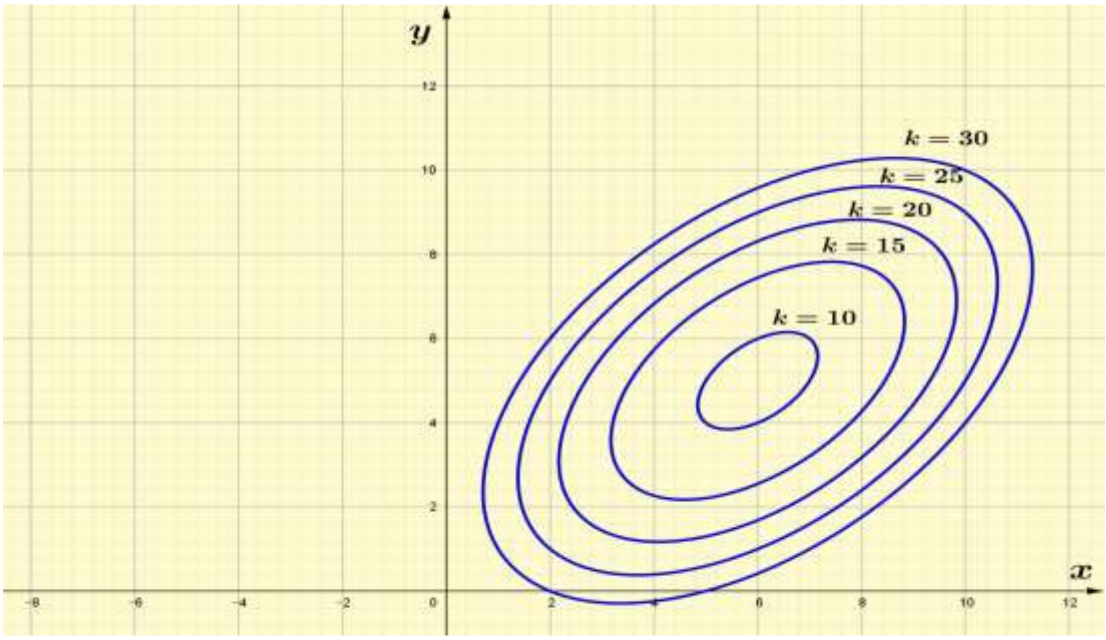
Figura 18



3.- Ejemplo. - Encontrar las curvas de nivel, para la ecuación: $z = -x^2 + 7x + xy + 4y - y^2$; Si k: $10 , 15 , 20 , 25 , 30$

Solución: De igual manera, como los ejemplos anteriores, hemos usado el programa GeoGebra, para hallar las curvas de nivel, previamente, haciendo $z = k$. En la Figura 19 se observa, la familia de elipses, que representa las curvas de nivel de la ecuación propuesta.

Figura 19

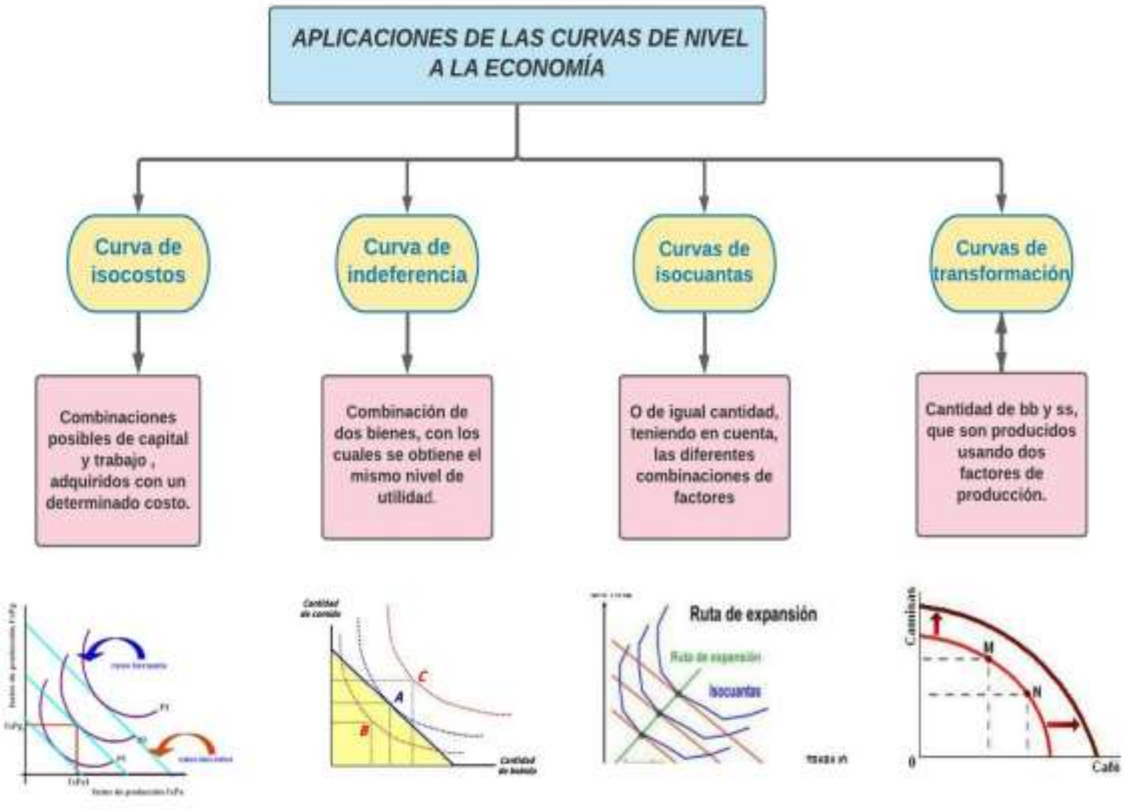


CAPITULO II .- APLICACIÓN DE LA CURVA DE NIVEL A LA ECONOMÍA.-

2.1.- Curvas de nivel a la economía

Las curvas de nivel se usan en muchos tópicos de la teoría económica, por ejemplo, cuando se estudian las llamadas curvas de indiferencia conocido también como curvas de nivel de utilidad constante, también cuando se estudian las isocuantas o curvas de nivel de producción constante, de igual forma en los isocostos o curvas de nivel de costo constante, así mismo las curvas de transformación, más conocidas como frontera de posibilidades de producción. Lo descrito, lo representamos mediante un diagrama. Figura 20.

Figura 20



Los economistas, por lo general, cuando estudian los tópicos mencionados, como es natural, se centran, más en el análisis económico, dejando de lado, en cierta parte, el sustento matemático, que está detrás, de esta teoría. Es así, que, en la presente separata, daremos énfasis en la parte matemática que en lo económico, cuando tengamos que referirnos a la curva de nivel.

1.- Ejemplo aplicado a la economía:

Sea la función de la producción Cobb-Douglas[2]:

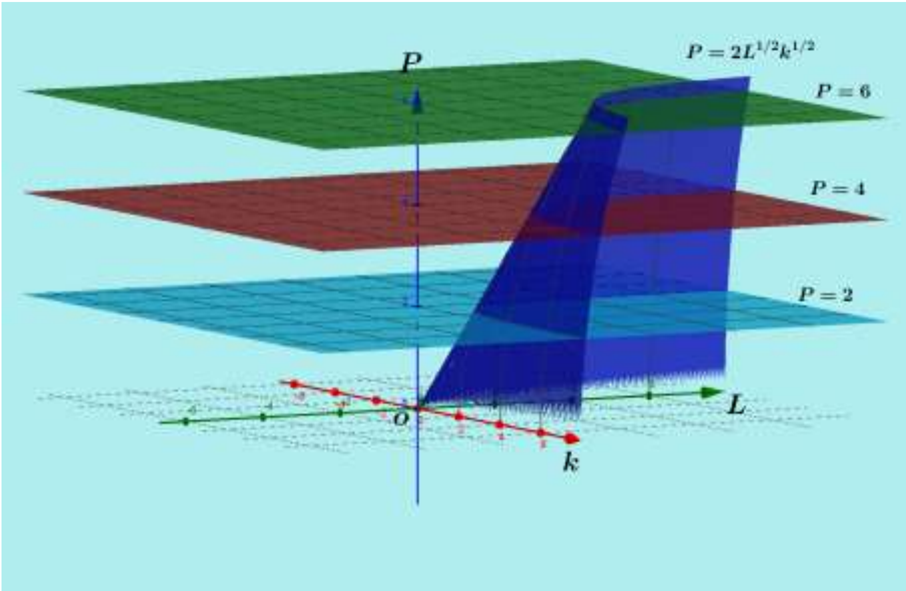
$$P = 2L^{1/2}.K^{1/2}$$

Trazar un mapa de contorno para: $C = \ 6\,,4\,,2$

Solución. –

Graficando la función de producción Cobb-Douglas, usando el aplicativo GeoGebra, es la superficie que aparece de color azul, en la Figura 21, ésta superficie, al ser interceptada por los planos $P = 2\ \ ,\ P = 4\ \ ,\ P = 6$, forman en dichos planos unas curvas, que al ser proyectado al plano xy, son las llamadas curvas de nivel, las cuales, al graficarlo en el sistema de coordenadas bidimensionales, son las que se observan en la Figura 22.

Figura 21



Otra manera de encontrar las curvas de nivel, que aparecen en la Figura 21, es operando de igual manera, como hemos elaborado en los ejemplos anteriores. Entonces, partiendo de la función $P = 2L^{1/2}.K^{1/2}$ y haciendo:

$$P = C \rightarrow C = 2L^{1/2}.K^{1/2}$$

Obtenemos para:

$C = 6\ \ \rightarrow\ 6 = 2L^{1/2}.K^{1/2}\,; entonces\ L.K = 9\ \rightarrow\ L = \frac{9}{K}\ \ ;\ K \neq 0$

$C = 4\ \ \rightarrow\ 4 = 2L^{1/2}.K^{1/2}\,; entonces\ L.K = 4\ \rightarrow\ L = \frac{4}{K}\ :\ K \neq 0$

[2] Charles Cobb y Paul Douglas, consideraron que la producción (P) está en relación con la cantidad de mano de obra empleada (L) y la cantidad de capital invertido (K).

$$C = 2 \;\rightarrow\; 2 = 2L^{1/2}.K^{1/2} \;;\, entonces\; L.K = 1 \;\rightarrow\; L = \frac{1}{K}\;;\quad K \neq 0$$

Para graficar las hipérbolas (Curvas de nivel en este caso), nos auxiliamos

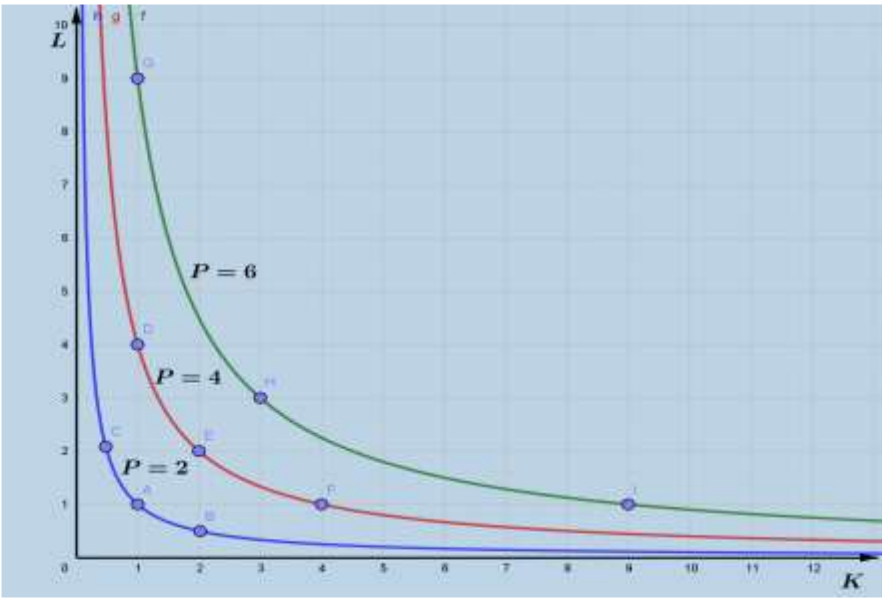
de los siguientes cuadros tabulados.

C=6	
L	K
9	1
3	3
1	9

C=4	
L	K
4	1
2	2
1	4

C=2	
L	K
2	1/2
1	1
1/2	2

Figura 22



Graficado los puntos de cada cuadro tabulado y uniéndolos mediante una curva, se tiene la familia de hipérbolas, que representan las curvas de nivel. (Figura 22)

2.2 Aplicación de las curvas de nivel a la optimización. –

En las asignaturas de investigación de operaciones o de investigación operativa, se estudian, los temas de optimización, que se caracterizan, por encontrar la mejor solución de un conjunto de posibles soluciones de un programa dado. Esta técnica de la optimización, puede ser usada para resolver una gran variedad de problemas relacionados con la economía, particularmente en los negocios, donde, como es sabido, los recursos son limitados y las empresas deben de encontrar la mejor asignación de esos recursos a fin de aumentar al máximo sus beneficios o disminuir al mínimo sus costos. Las curvas de nivel, se usan también, en los tópicos de optimización de funciones bivariadas; Gracias a ellas, podemos encontrar los máximos y/o los mínimos de funciones de dos variables.

Valga la ocasión, para presentar un conjunto de ejemplos ilustrativos, referidos al uso de las curvas de nivel a problemas de optimización.

Ejemplo 1.-

Sea el problema.

Optimizar:	$f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$	Función objetivo
Sujeto a:	$2x + y = 4$	Restricción

Solución:

Primero, resolveremos el problema mediante el uso del método de Lagrange, para eso formamos la función compuesta de Lagrange.

$$\boxed{L(x,y,\lambda) = 25 - x^2 - y^2 - \lambda.(2x + y - 4)}$$

Derivamos Parcialmente con respecto a x, y, λ

$$\left.\begin{aligned} L_x &= -2x - 2\lambda = 0 \\ L_y &= -2y - \lambda = 0 \\ L_\lambda &= -2x - y + 4 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Simplificando y ordenando

$$\left.\begin{aligned} x + \lambda &= 0 \\ 2y + \lambda &= 0 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \lambda = -x$$

Reemplazando en la 2da ecuación, $\lambda = -x$ y relacionándola con la tercera se tiene:

$$\left.\begin{aligned} -x + 2y &= 0 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo el sistema:

$$x = \frac{8}{5} \quad , \quad y = \frac{4}{5} \quad , \quad \lambda = -\frac{8}{5}$$

Reemplazando en la función objetivo, los valores encontrados.

$$f\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right) = 25 - \left(\frac{8}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 545/25$$

Para verificar, si es un máximo o un mínimo, aplicamos la condición suficiente, mediante la matriz hessiana. (formada por derivadas de segundo orden)

$$HB = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Cuyo determinante, es:

$$|HB| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Resolviendo el determinante, usando menores complementarios.

$$|HB| = 0\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$|HB| = 10$ El resultado es positivo, por tanto, es un máximo.

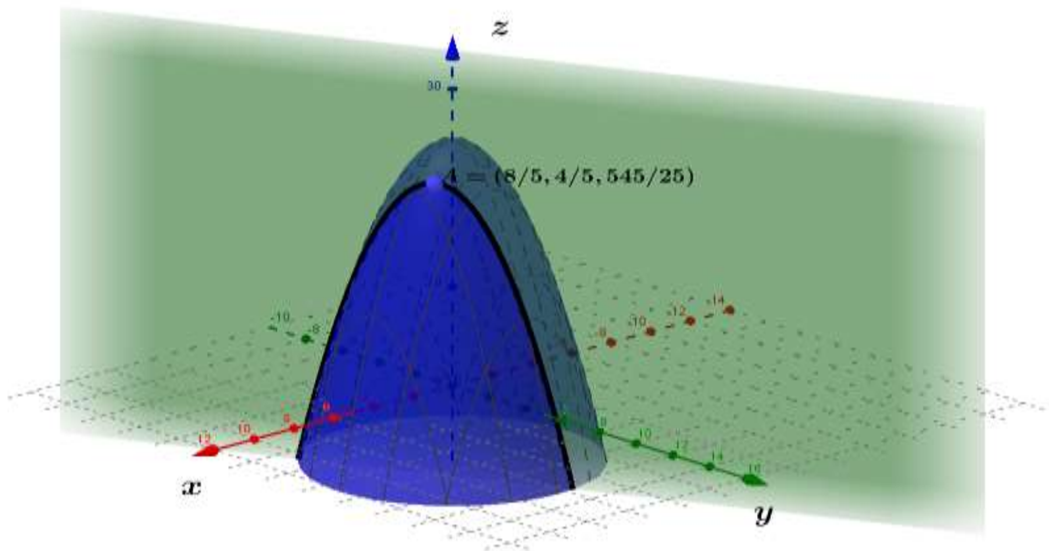
Finalmente, reemplazamos los valores obtenidos en la función de Lagrange.

$$\mathrm{L}\left({}^{8}/_{5}, {}^{4}/_{5}, -{}^{8}/_{5}\right) = 25 - \left(\frac{8}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 - (-\frac{8}{5})[2\left(\frac{8}{5}\right) + \frac{4}{5} - 4]$$

$$= 25 - \frac{64}{25} - \frac{16}{25} + \frac{128}{25} + \frac{32}{25} - \frac{32}{25}$$

$$= 545/25 = 21.8$$

Representa, el máximo valor, que alcanza la función objetivo, como se puede apreciar en la Figura 23, donde la función objetivo está representado por el paraboloide, la restricción por el plano, que corta al paraboloide, reflejándose en ella una parábola, alcanzando su máximo valor en el punto $A = ({}^{8}/_{5}, {}^{4}/_{5}, {}^{545}/_{25})$



<u>El mismo problema</u> que hemos resuelto mediante el método de Lagrange, lo resolveremos usando conceptos de curvas de nivel; Haciendo $f(x, y) = k$ en la función objetivo.

$$k = 25 - x^2 - y^2$$

Dando diferentes valores arbitrarios a k, como:

Para $k = 0$; $se\ obtiene$: $x^2 + y^2 = 5^2$

Para $k = 9$; $se\ obtiene$: $x^2 + y^2 = 4^2$

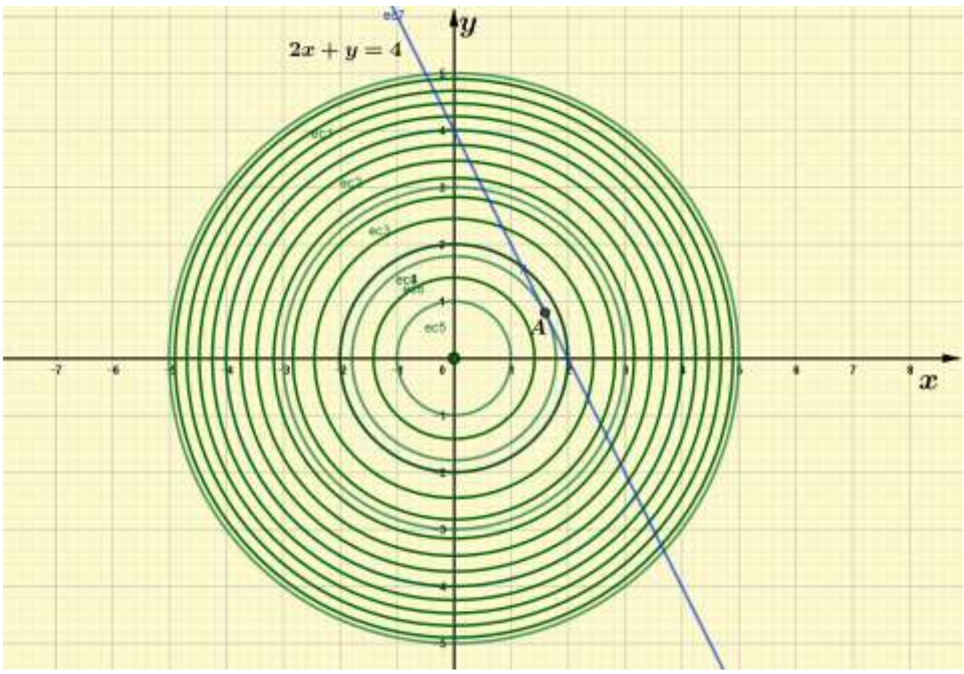
Para $k = 16$; $se\ obtiene$: $x^2 + y^2 = 3^2$

Para $k = 21$; $se\ obtiene$: $x^2 + y^2 = 2^2$

Para $k = 24$; $se\ obtiene$: $x^2 + y^2 = 1$

Con ayuda del aplicativo GeoGebra, procedemos a graficar éstas y otras circunferencias, como podemos apreciar en la Figura 24, asimismo, en el mismo sistema de coordenadas, graficamos la restricción $2x + y = 4$, que esta representado por la recta de color azul y que es tangente a una de las familias de circunferencia y que esta simbolizado dicho punto de tangencia, con la letra A, que representa el punto óptimo del problema propuesto.

Figura 24



Para encontrar el punto A, procedemos de la siguiente manera:

Derivamos la función objetivo:

$$-2x - 2yy' = 0$$

Despejando y' $\qquad y' = -\frac{x}{y}$

De igual manera, derivamos la restricción

$$2 + y' = 0$$

Despejado $\qquad y' = -2$

Igualando ambas derivadas, y adicionado la restricción, para formar el siguiente sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y} &= 2 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene los siguientes valores, que son los mismos, que se encontró con Lagrange, que representan la solución óptima.

$$x = {}^{8}/_{5} \quad , \quad y = {}^{4}/_{5} \quad ; \quad z = {}^{109}/_{5} = 21.8$$

<u>Ejemplo 2.-</u>

Sea el problema:

$$\text{Máx. } z = xy \qquad \text{función objetivo}$$

$$\text{s. a:} \quad x + y = 6 \qquad \text{restricción}$$

<u>Solución</u>. -

Para resolver el problema, mediante curvas de nivel, hacemos: $\boldsymbol{z} = k$, lo reemplazamos en la función objetivo:

$$xy = k$$

Luego damos valores arbitrariamente a k.

Para $k = 1$, se tiene $xy = 1$

Para $k = 2$, se tiene $xy = 2$

Para $k = 3$, se tiene $xy = 3$

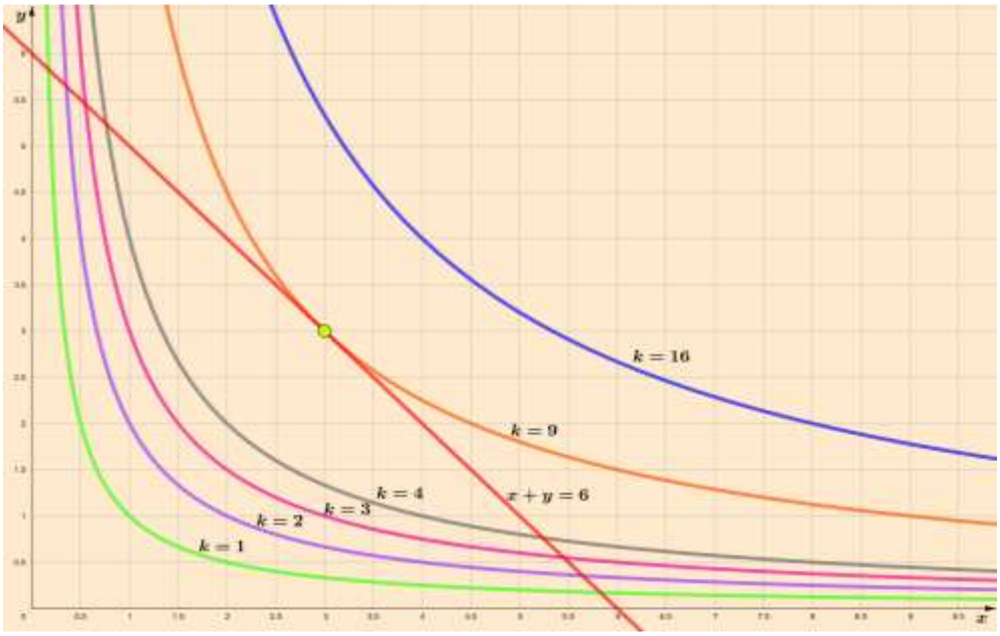
Para $k = 4$, se tiene $xy = 4$

Para $k = 9$, se tiene $xy = 9$

Para $k = 16$, se tiene $xy = 16$

Graficando estas curvas, asimismo la restricción, en el mismo cuadrante del sistema cartesiano, como vemos en la Figura 25. Se puede apreciar, que existe un punto, (de color verde) donde la recta es tangente con una de las curvas (ambas de naranja). Esto nos indica, que la solución del problema, se encuentra allí.

Figura 25



Para determinar dicho punto, derivamos la función objetivo, como también la restricción, luego despejando y' .

$$\left.\begin{array}{l} xy' + y = 0 \\ 1 + y' = 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} y' = -y/x \\ y' = -1 \end{array}$$

Igualando, ambas relaciones.

$$y/_{x} = 1$$

Operando y adicionando la restricción, se forma el sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} y = x \\ x + y = 6 \end{array}\right\}$$

Cuyo resultado, es $x = 3$, $y = 3$ Por tanto la solución del problema es: $z = 9$

Ejemplo 3.-

Sea el problema. -

$$\text{Max} \quad z = f(x,y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x \quad \text{Función objetivo}$$

$$S.a \quad x + y = 13 \quad \text{Restricción}$$

Solución:

Al igual que los ejemplos anteriores, usaremos las curvas de nivel para encontrar la solución, para eso hacemos:

$$z = k$$

Lo reemplazamos en la función objetivo

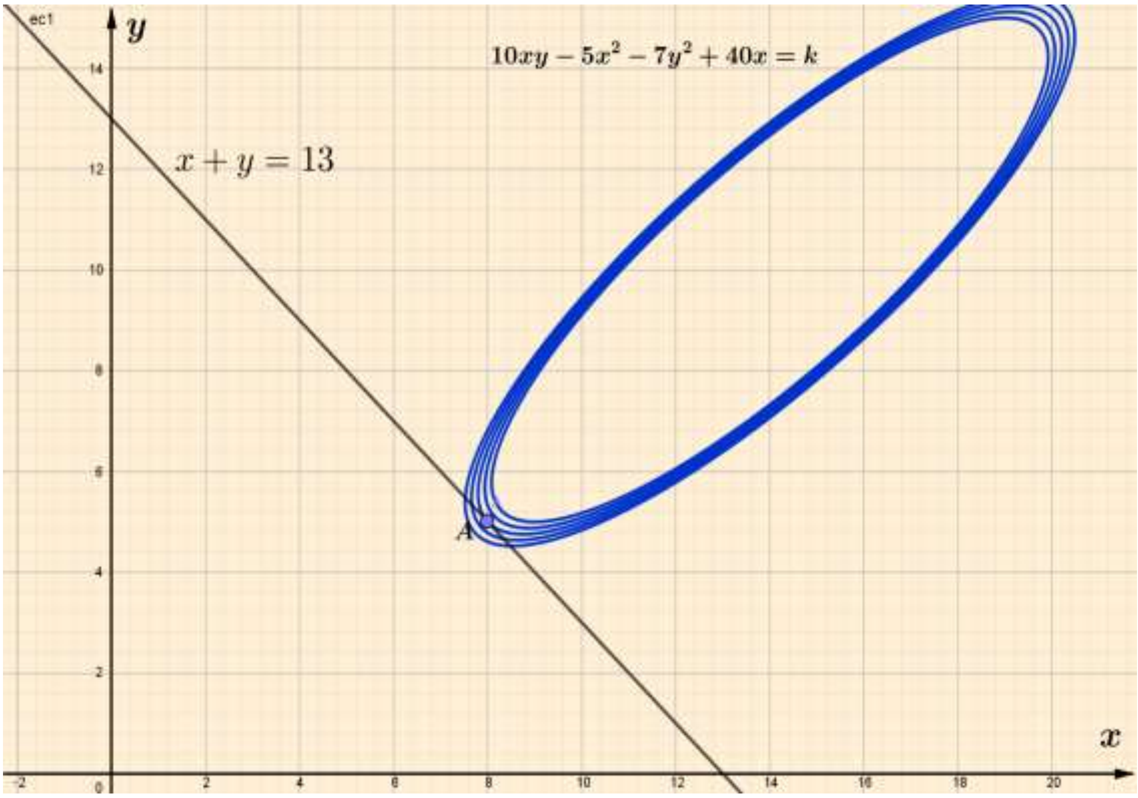
$$10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x = k$$

A continuación, asignamos algunos valores para k

$$Cuando\ k = 0\ ;\ \ 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x = 0$$
$$Cuando\ k = 20\ ;\ \ 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x = 20$$
$$Cuando\ k = 30\ ;\ \ 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x = 30$$
$$Cuando\ k = 80\ ;\ \ 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x = 80$$

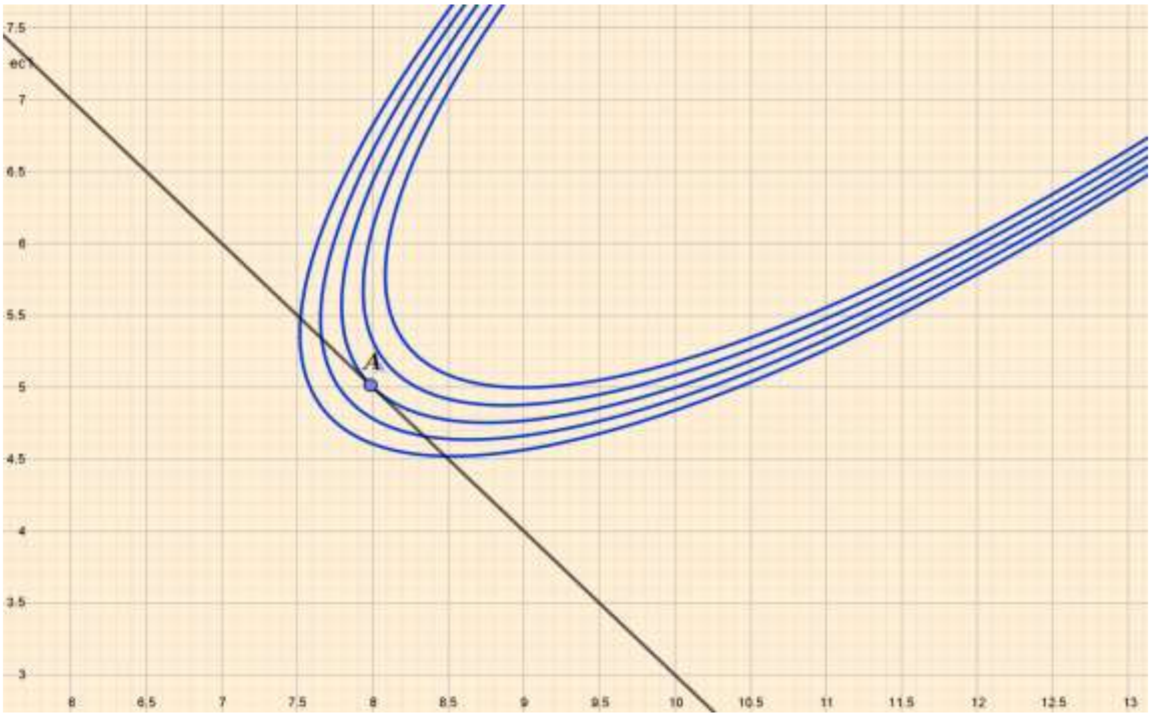
Con ayuda del aplicativo GeoGebra, procedemos a graficar las curvas, que, en este caso, son elipses con eje de simetría, en forma oblicua. Figura 26

Figura 26



En la Figura 26, se observa el punto A, que representa la solución óptima del problema, en dicho punto la recta es tangente a una de las elipses. Para mayor precisión se amplía la imagen en el punto A. Figura 27

Figura 27



Para determinar los valores del punto A, derivamos la función objetivo

$$10y + 10xy' - 10x - 14yy' + 40 = 0$$

Luego despejamos y'

$$y' = \frac{10x-10y-40}{10x-14y}$$

Lo mismo, hacemos con la restricción

$$1 + y' = 0 \quad ; \quad y' = -1$$

Igualando las derivadas

$$\frac{10x-10y-40}{10x-14y} = -1$$

Operando, mediante términos semejante.

$$10x - 10y - 40 = -10x + 14y$$

Reduciendo y adicionando la restricción, se forma el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} 20x - 24y = 40 \\ x + y = 13 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, se tiene la solución.

$$x = 8 \;\; ; \;\; y = 5$$

Para determinar el valor de z, reemplazamos estos valores en la función objetivo.

$$\text{Max} \quad z = f(8{,}5) = 10(8)(5) - 5(8)^2 - 7(5)^2 + 40(8) = 225$$

Que representa el máximo valor, que tiene z.

Ejemplo 4.-

Resolver el problema de costo (C) en función de cantidad (q)

$$\textbf{Min} \quad C = 2q_1^2 + q_1\, q_2\, + q_2^2 + 500 \qquad \text{Función objetivo}$$

$$\textbf{s.a} \quad q_1 + q_2 = 200 \qquad \text{Restricción}$$

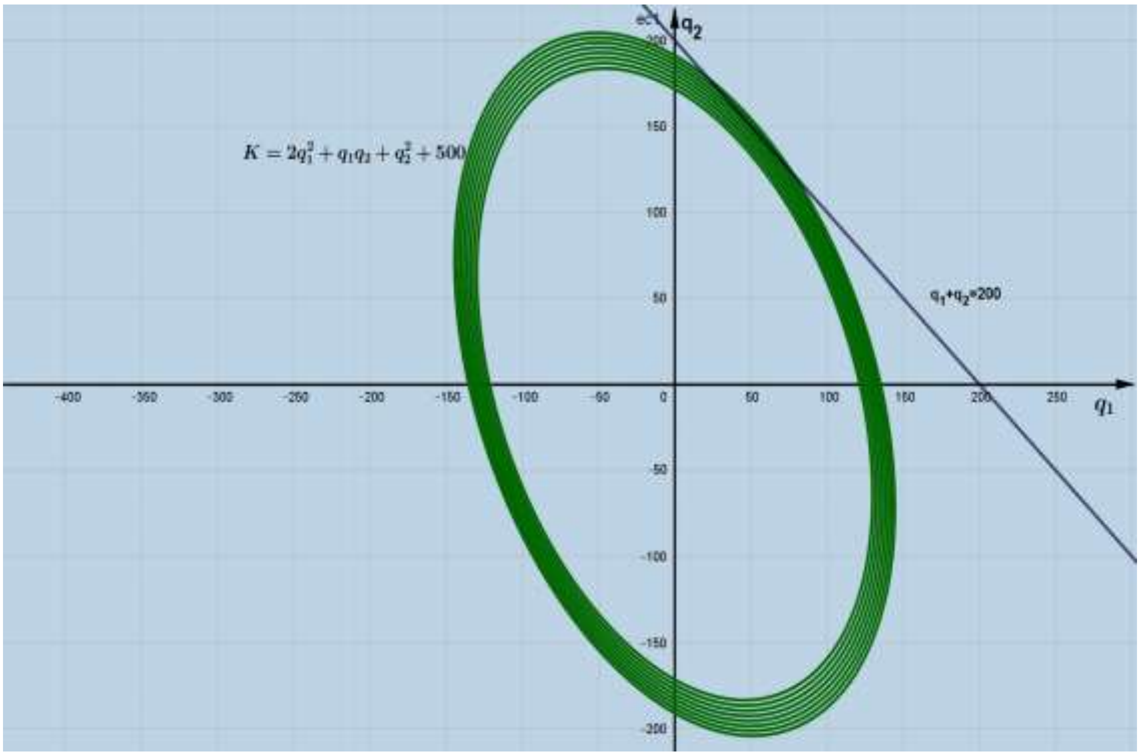
Solución

Procedemos como en los ejemplos anteriores, es decir, graficamos la función objetivo, para tal, hacemos: $c = k$

$$k = 2q_1^2 + q_1\, q_2\, + q_2^2 + 500$$

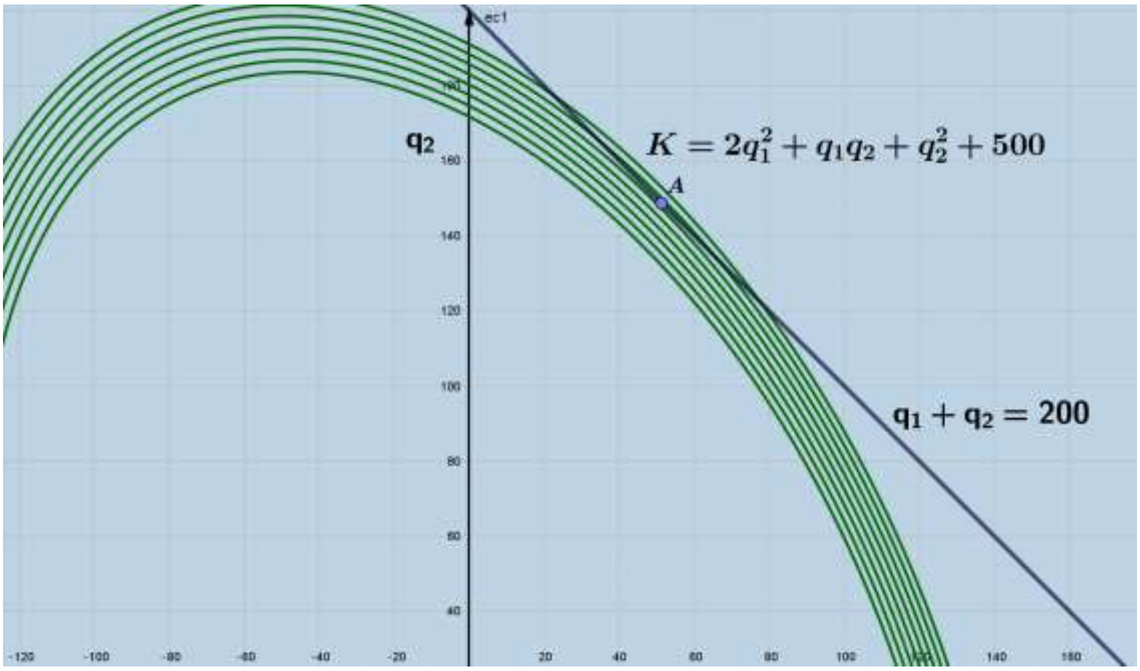
Dando distintos valores a k , graficamos las curvas de nivel con ayuda del programa GeoGebra, obteniéndose el siguiente gráfico, Figura 28, donde se puede apreciar, el mapa de curvas de nivel, representados por unas elipses y la recta de restricción.

Figura 28



Si ampliamos la Figura 28, de forma, que se puede visualizar más claramente, el punto A, que representa la tangente, de la recta de restricción con una de las elipses, Figura 29, que representaría el punto óptimo.

Figura 29



Para determinar dicho punto óptimo, derivamos la función objetivo, así como la recta de restricción, luego despejamos q'_2 en ambas relaciones e igualamos.

$$4q_1 + q_1q_2' + q_2 + 2q_2q_2' = 0 \quad , \quad \text{Derivando: } q_2 = f\ (q_1)$$

$$q_2'(\ q_1 + 2q_2) = -\ 4q_1 - q_2$$

$$q_2' = -(4q_1 + q_2)/(q_1 + 2q_2\ ) \quad (1)$$

$$1 + q_2' = 0 \quad q_2' = -1 \quad (2)$$

Igualando (1) y (2), $\frac{4q_1+q_2}{q_1+2q_2} = 1$ *se tiene* $4q_1 + q_2 = q_1 + 2q_2$

Ordenando, mediante términos semejante y adicionando la ecuación de la restricción, se forma el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 3q_1 - q_2 &= 0 \\ q_1 + q_2 &= 200 \end{aligned}\right]$$

Resolviendo, obtenemos los valores de $q_1\ y\ \ q_2$

$$q_1 = 50\ ;\ q_2 = 150$$

Para obtener el óptimo, en este caso el valor mínimo costo, reemplazamos los valores obtenidos, en la función objetivo.

$$C = 2(50)^2 + (50)(150) + (150)^2 + 500 = 35{,}500$$

Siendo $c = 35{,}500$ el valor mínimo.

A continuación, mostramos un caso de la teoría del consumidor, como es la curva de indiferencia, que muestran las combinaciones de productos que proporciona al consumidor, el mismo grado de satisfacción y que tiene que tener en cuenta la disponibilidad presupuestal (ingreso) con lo que tenga el consumidor.

Mostramos un ejemplo ilustrativo de optimización de una función de utilidad sujeta a la recta de presupuesto o ingreso del consumidor.

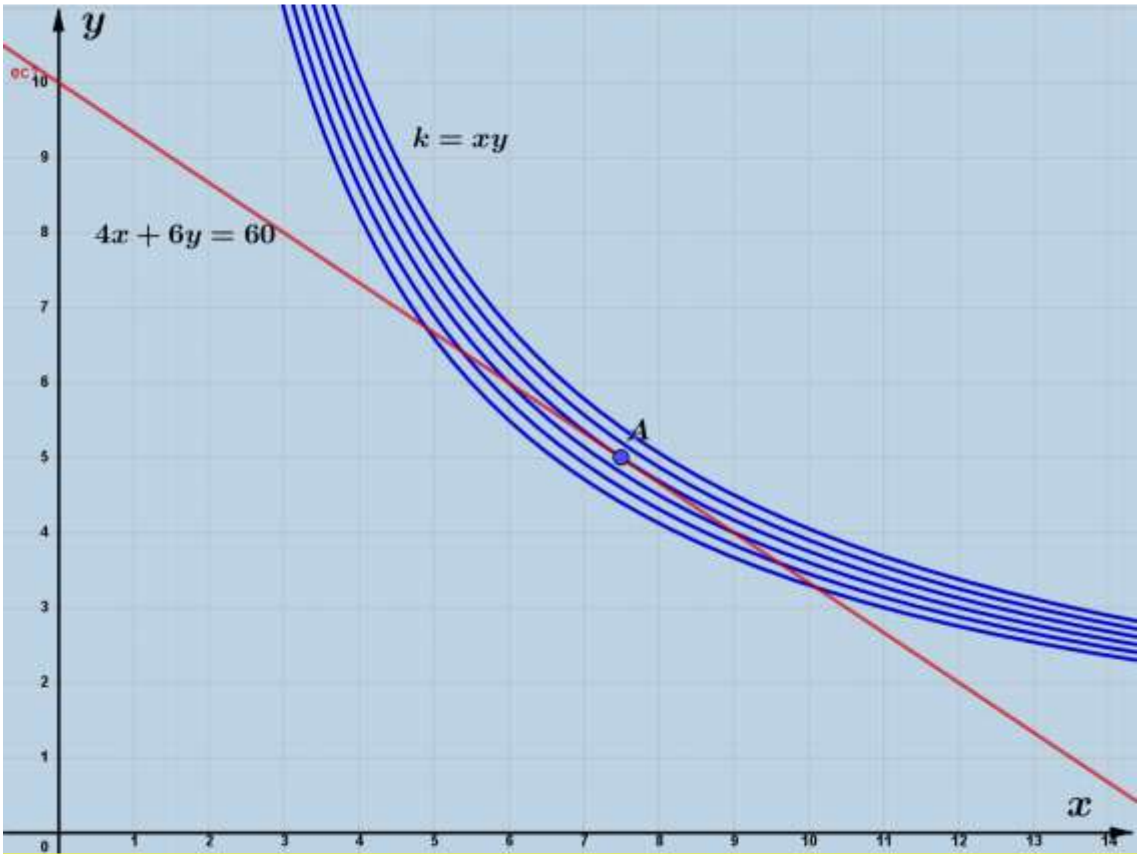
Ejemplo 5.- Max $u = xy$ Objetivo: Función utilidad[3]

$4x + 6y = 60$ Restricción presupuestaría

Solución.-

Con ayuda de programa GeoGebra, graficamos las curvas de indiferencia y la recta de presupuesto Figura 30, se observa el punto A, que representa el punto óptimo, donde la recta de presupuesto es tangente a una de las curvas de indiferencia.

Figura 30



[3] Ejemplo de optimización de la función utilidad (Curvas de indiferencia) sujeta a restricción presupuestaria del consumidor.

Para determinar la pareja ordenada del punto A, derivamos la función objetivo y la recta de restricción presupuestal.

$$xy' + y = 0 \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{y}{x}$$

$$4 + 6y' = 0 \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{2}{3}$$

Igualando ambas derivadas

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad 2x - 3y = 0$$

Formando el sistema, con la restricción

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 0 \\ 4x + 5y = 60 \end{array}\right\}$$

Resolviendo, se obtiene

$$x = 7.5 \;\;,\;\; y = 5 \;\;,\; donde\ el\ máximo\ \ u = 37.5$$

<u>Ejemplo 6</u>.-

$$\text{Max } u = xyz \qquad \text{Objetivo: Función utilidad}^{4}$$

$$\text{S.a.} \quad 6x + 9y + 6z = 54 \qquad \text{Restricción: Plano presupuestario}$$

<u>Solución. -</u>

Haciendo: $u = k$

$\mathrm{k = xyz}$

Dando valores a k: Para $k = 18$, $18 = xyz \;\rightarrow\; z = \frac{18}{xy}$

Para $k = 72$, $72 = xyz \;\rightarrow\; z = \frac{72}{xy}$

Para $k = 110$, $18 = xyz \;\rightarrow\; z = \frac{110}{xy}$

Las gráficas de estas funciones, que se representan por medio de hiperboloides, se pueden apreciar en la Figura 31, que han sido trazadas, usando el aplicativo GeoGebra. Asimismo, en el mismo sistema de coordenadas tridimensionales, se ha graficado el plano presupuestario, como se puede notar, es tangente en el punto A, a unos de los hiperboloides. Dicho punto, representa el punto óptimo, que lo calcularemos, usando gradiente.

$$\text{De:} \quad \mathrm{k = xyz} \;\; \rightarrow \mathrm{F(x, y, z) = xyz - k}$$

Calculando el gradiente: $\nabla F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (y_0 z_0, x_0 z_0, x_0 y_0)$$

Como el vector gradiente a una superficie de nivel, en relación al plano, en el punto óptimo $p_0(x_0, y_0, z_0)$ esta dado por.

$$\boldsymbol{\nabla F(P - P_0) = 0} \quad (1)$$

[4] Ejemplo de optimización de la función utilidad (Superficie de indiferencia) sujeta al plano presupuestaria del consumidor.

Reemplazando, la información en (1):

$$(y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0)[(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0$$

$$(y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0)[(x - x_0, y - y_0, z - z_0)] = 0$$

Operando el producto escalar

$$y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0$$

Efectuando los paréntesis y trasponiendo términos

$$y_0z_0x + x_0z_0y + x_0y_0z = y_0z_0x_0 + x_0z_0y_0 + x_0y_0z_0$$

Igualando esta expresión con la restricción.

$$6x + 9y + 6z = 54$$

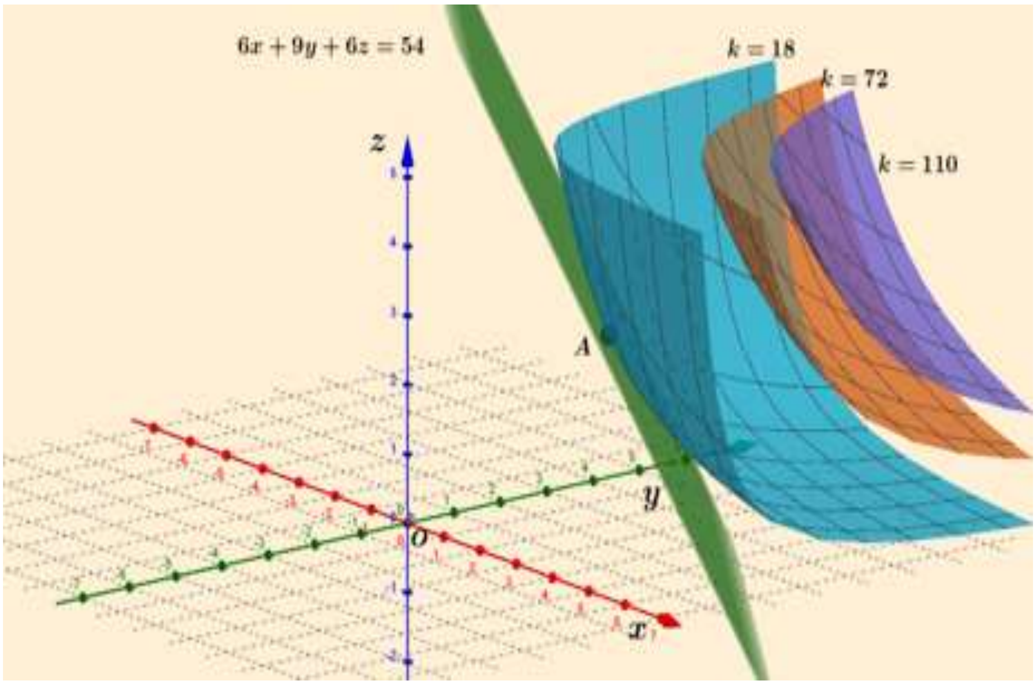
Igualando los coeficientes respectivos de las variables, se tiene.

$$\left.\begin{aligned} y_0z_0 &= 6 \\ x_0z_0 &= 9 \\ x_0y_0 &= 6 \\ y_0z_0x_0 + x_0z_0y_0 + x_0y_0z_0 &= 54 \end{aligned}\right]$$

Resolviendo el sistema, se obtiene los valores óptimos: $x_0 = 3$, $y = 2$, $z_0 = 3$

Por tanto, la máxima utilidad, será: $u = (3)(2)(3) = 18$

Figura 31

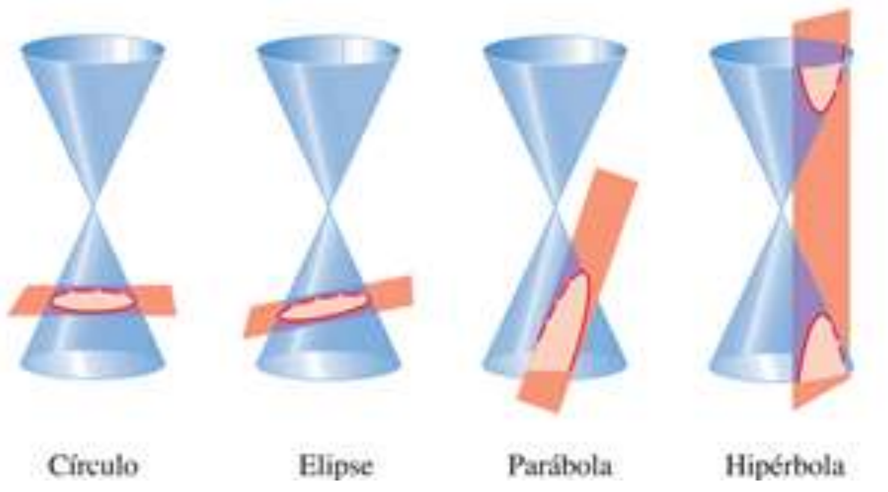


2.3.- Información adicional sobre curvas de nivel.-

a.- Cónicas. -

En geometría analítica se estudia las cónicas, como la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola; Las gráficas de éstas cónicas se obtienen al interceptar un cono por un plano $z = k$, como se puede apreciar en la Figura 32, el plano $z = k$, no necesariamente es exclusivamente, paralelo al plano xy, como habíamos visto hasta ahora, sino que puede ser inclinada o paralela al plano yz, estas posiciones del plano de color naranja, en un cono de color azul, hace que en dichos planos se refleje las cónicas , como se puede observar en la Figura 32

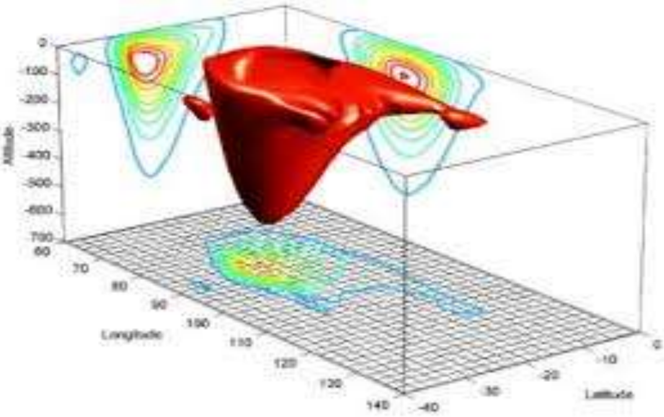
Figura 32



b.- Aplicaciones en la medicina. -

las curvas de nivel se aplican en varias ramas del conocimiento y la medicina, no es ajena, haciendo una extensión de los conceptos de las curvas de nivel, en cuanto a su proyección a los planos del sistema de coordenadas bidimensional, como podemos apreciar en la siguiente Figura 33. Que muestra, las proyecciones de las curvas de nivel. De un órgano humano (Corazón), proyectado, ya no solo al plano xy, (Plano horizontal) sino también a los planos xz e yz (Planos laterales o verticales).

Figura 33



<u>c.- Topografía. -</u>

Los profesionales que usan más frecuentemente las curvas de nivel, son los geógrafos y los ingenieros geográficos, cuya denominación a las curvas de nivel, le llaman <u>mapa topográfico</u>. También los arquitectos, aplican las curvas de nivel es sus estudios, pero en menor proporción.

A continuación, mostramos algunos ejemplos de mapa topográficos. Figura 34, Figura 35.

Figura 34

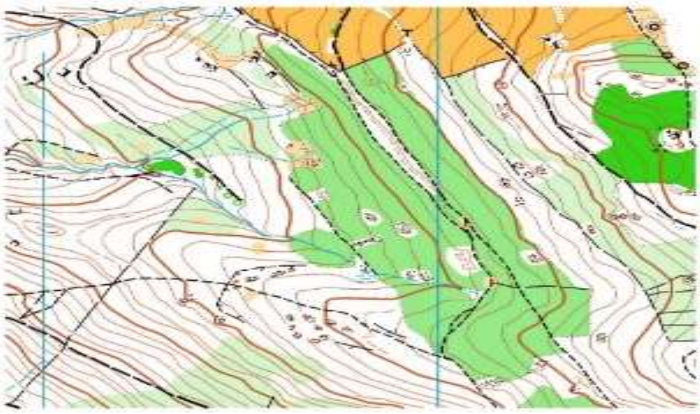


Figura 35

Referencia bibliográfica. –

Haeussler, E., Paul, R. y Wood. R. (2015). *Matemática para administración y economía* (12° ed.). Pearson Educación.

Leithold, L. (1989). *Matemáticas previas al cálculo*. Harla.

Haeussler, P. (2008). *Matemática para administración y economía* (12° ed.). Prentice Hall.

Stewart, J. (2002). *Cálculo multivariable* (4° ed.). Thomson-Learning.

Chiang, A. (1984). *Métodos fundamentales de economía matemática.* McGraw-Hill.

López, E. (2011). *Apuntes de clase.* FCE-UNAC.

Huang, D. (1994). *Introducción al uso de la matemática en el análisis económico.* Siglo-Veintiuno.

<u>ANEXOS</u>

En el presente anexo, presentamos las entradas en programa GeoGebra, para obtener algunas de las figuras que se muestran en la presente publicación.

Figura 11

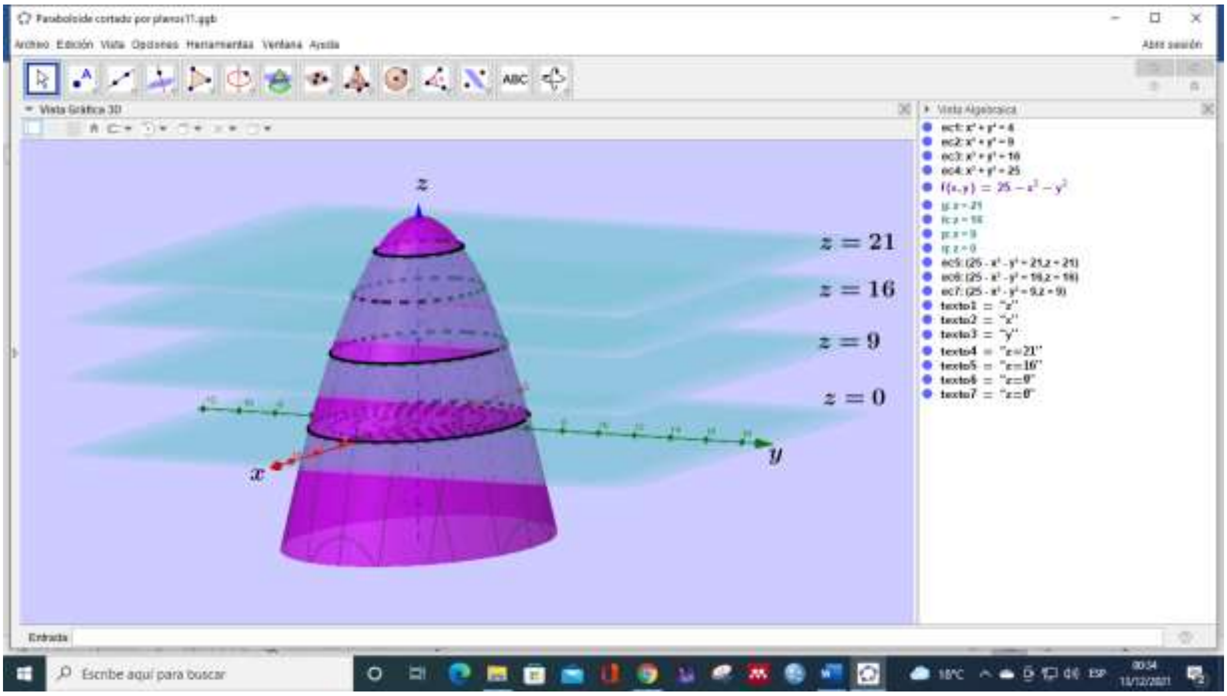


Figura 12

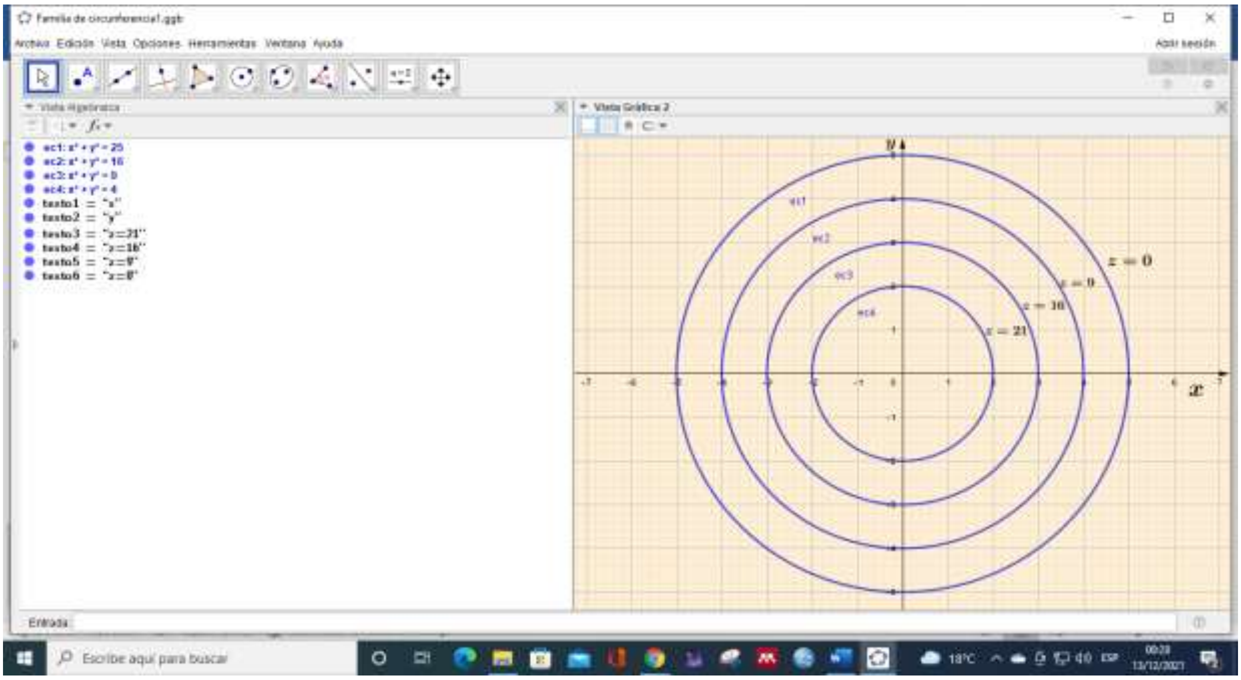


Figura 13

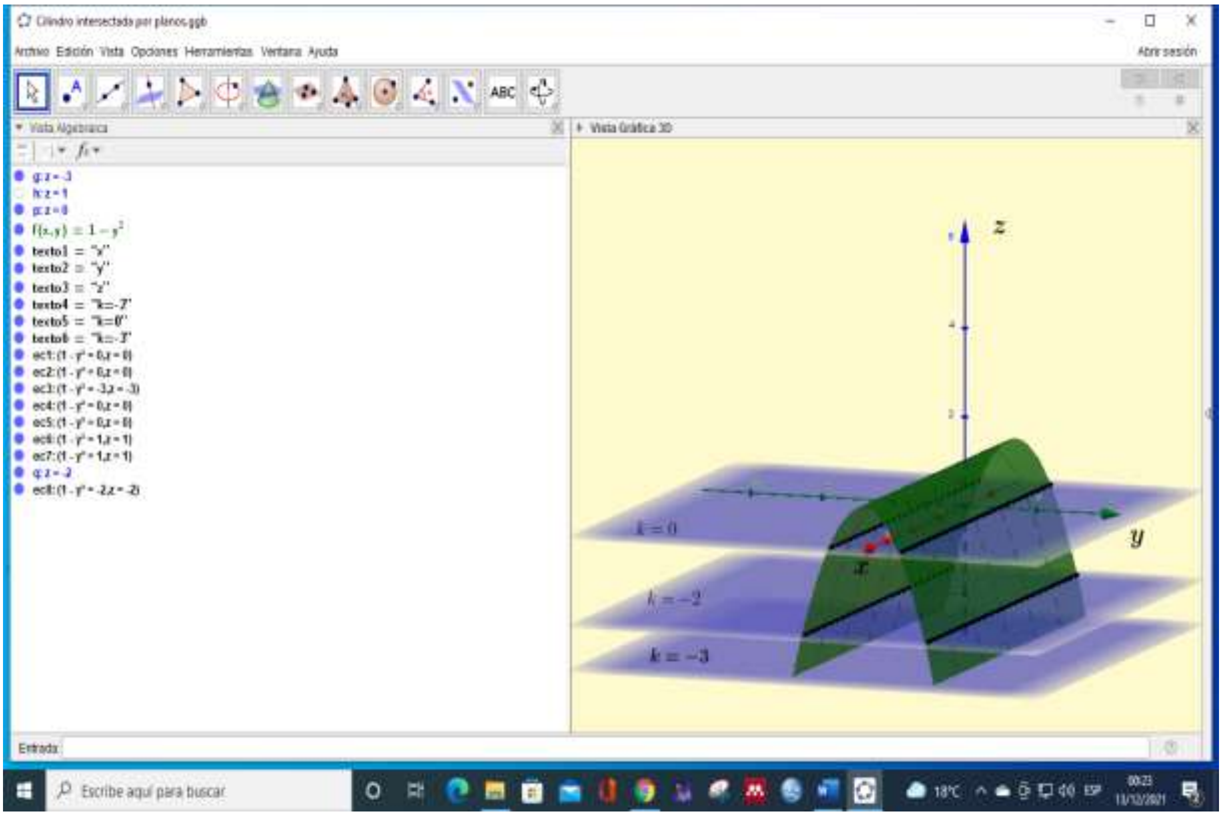


Figura 14

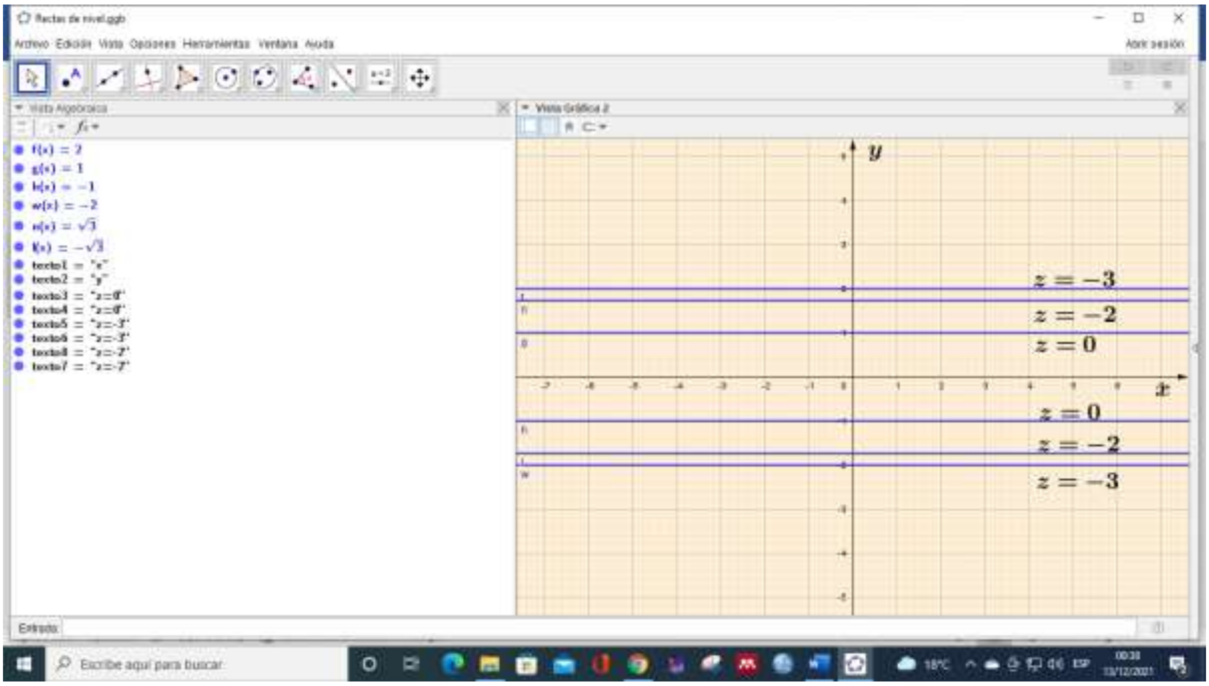


Figura 16

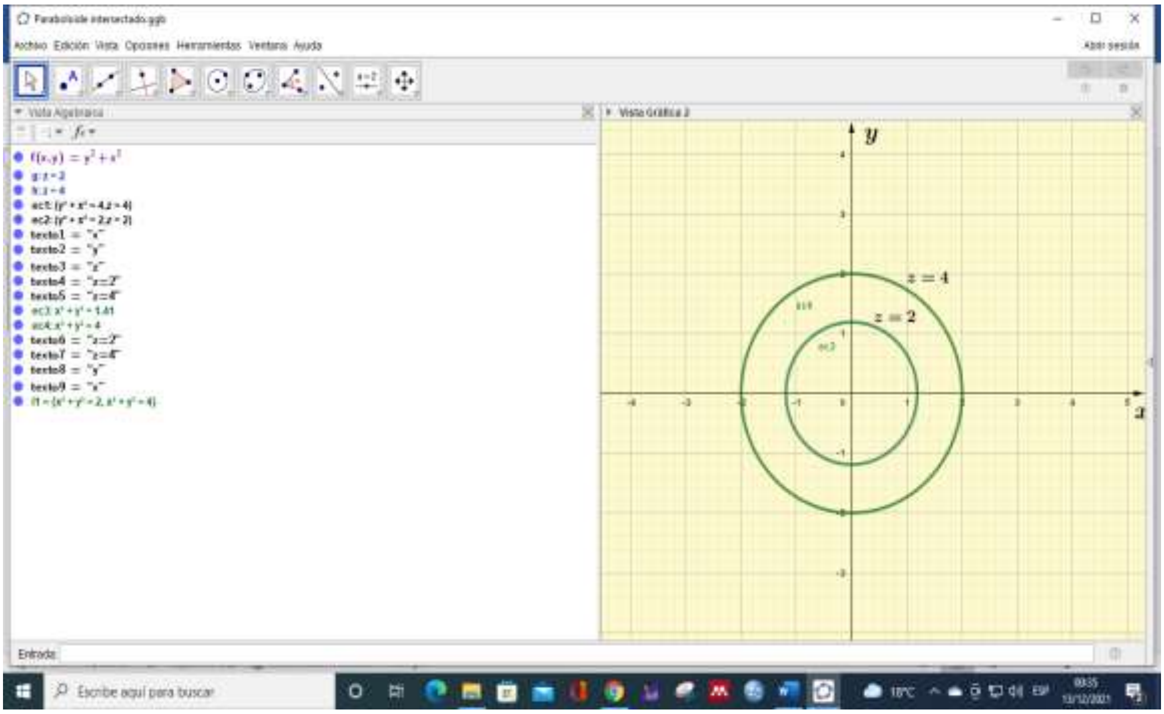


Figura 18

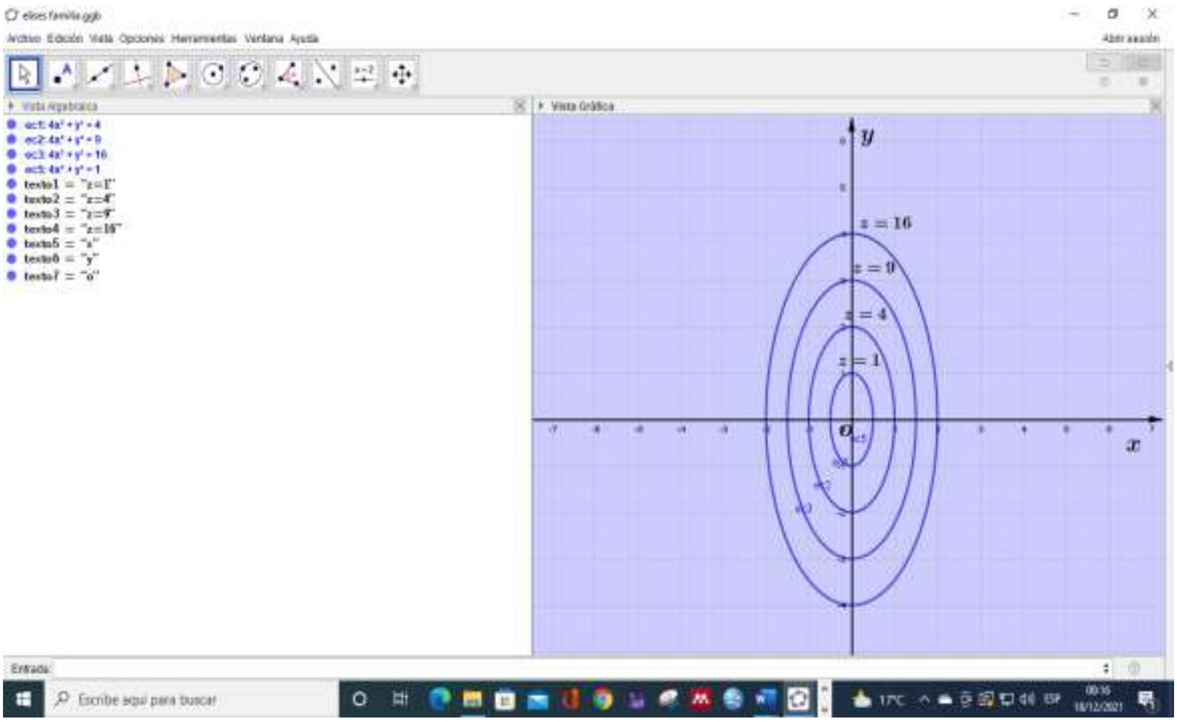


Figura 19

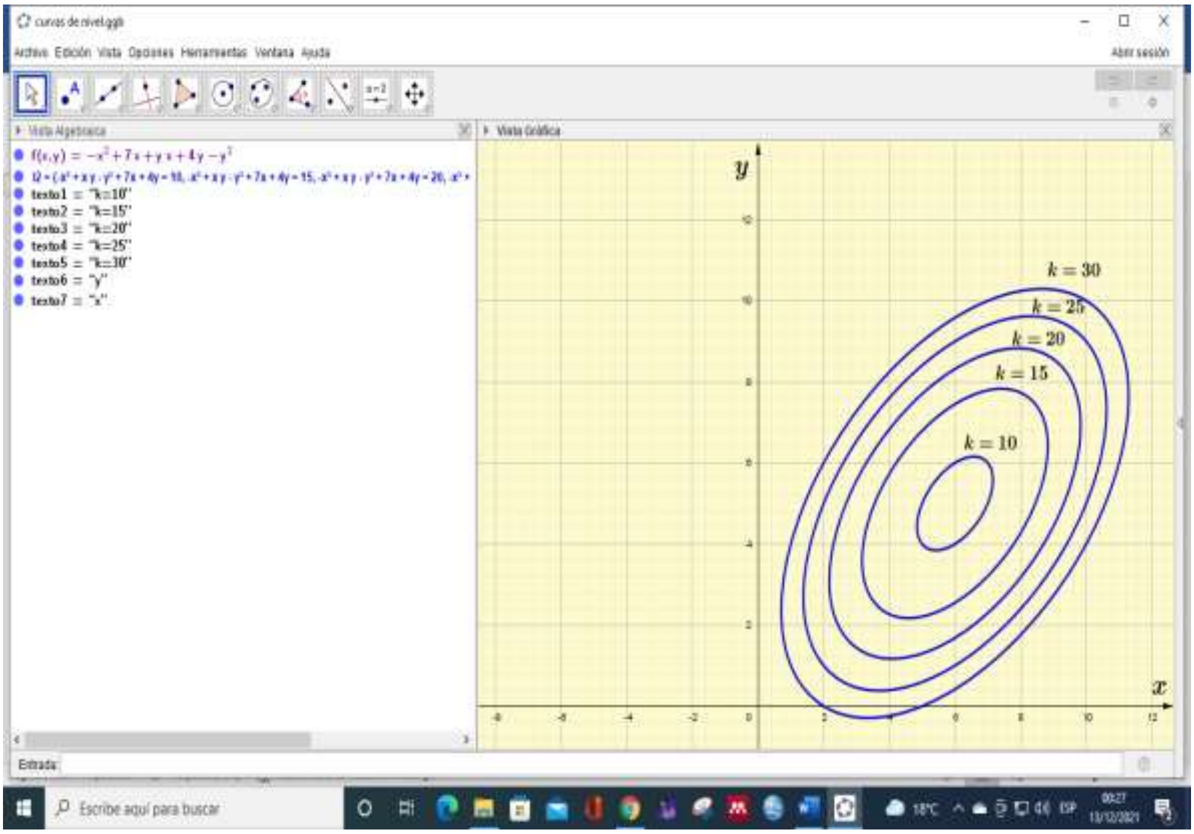


Figura 21

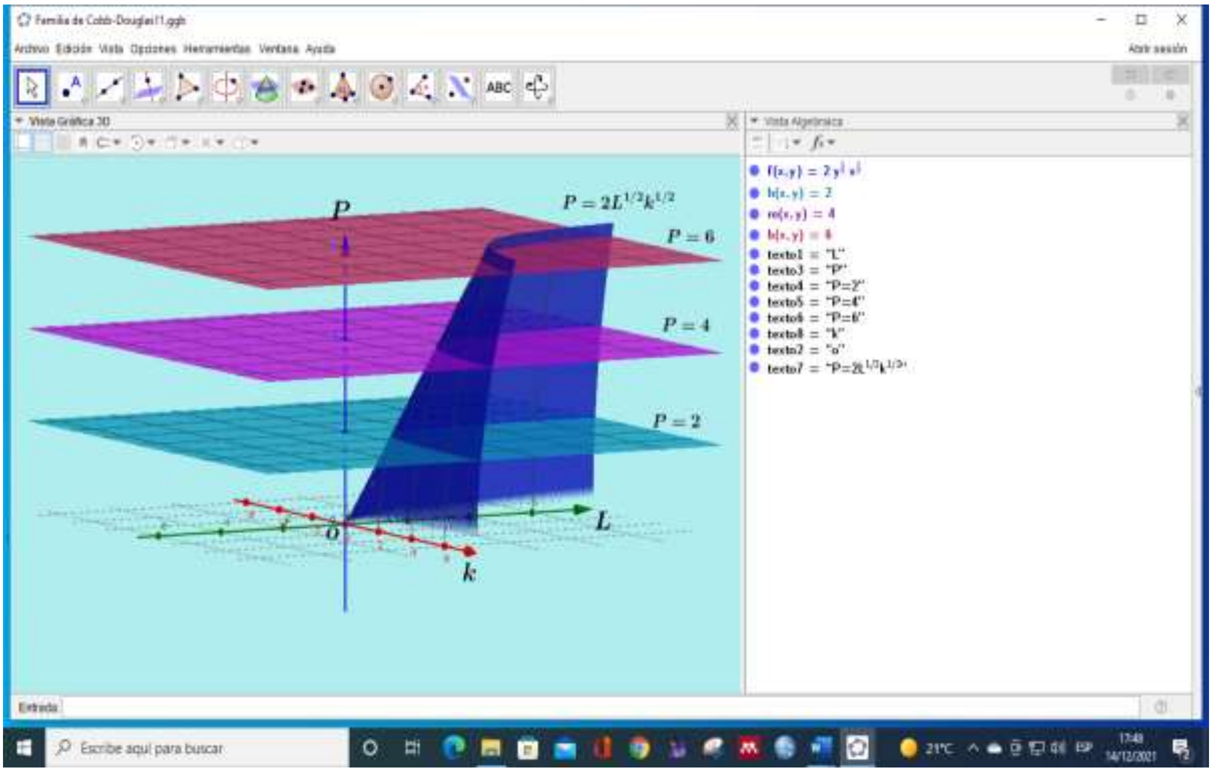


Figura 22

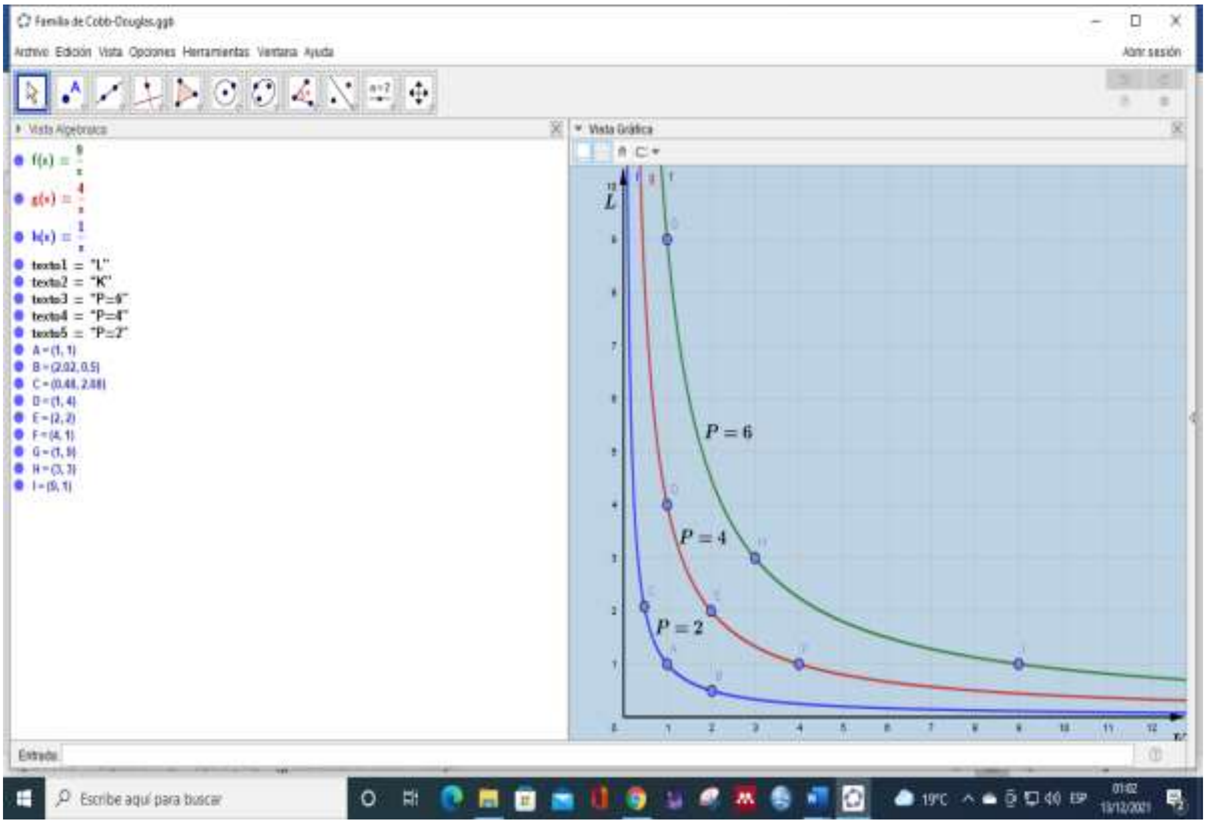


Figura 23

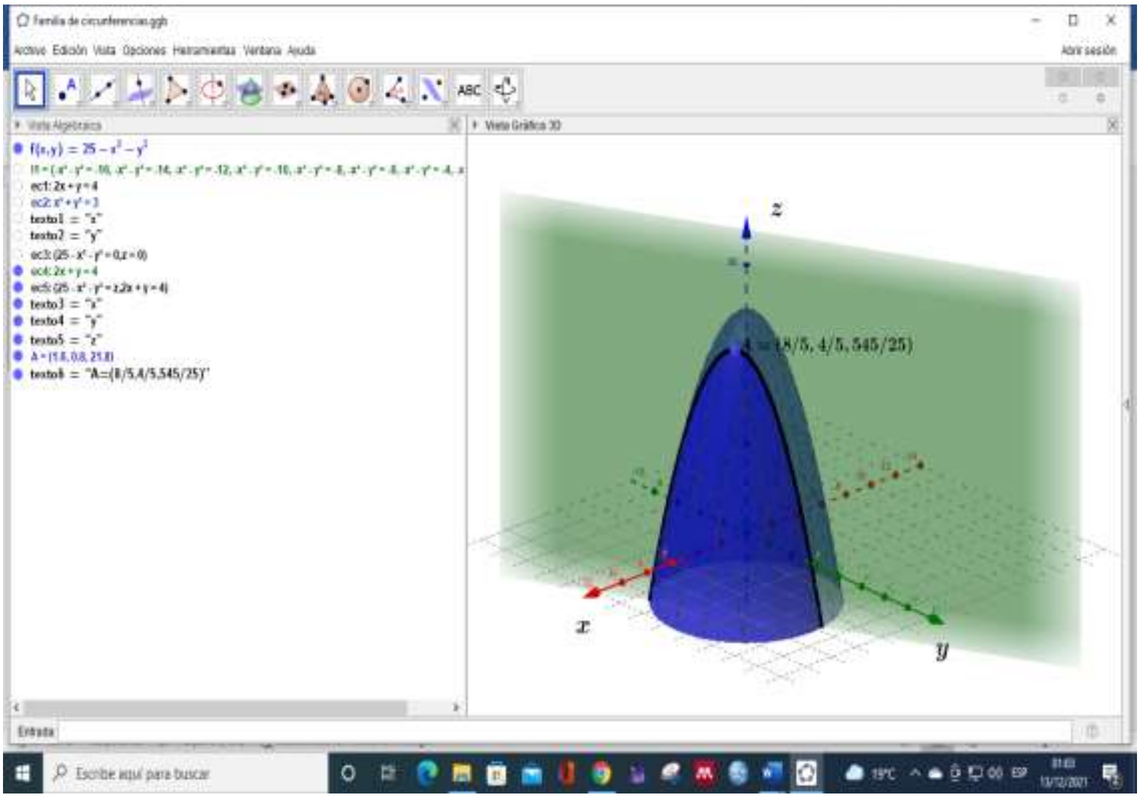


Figura 24

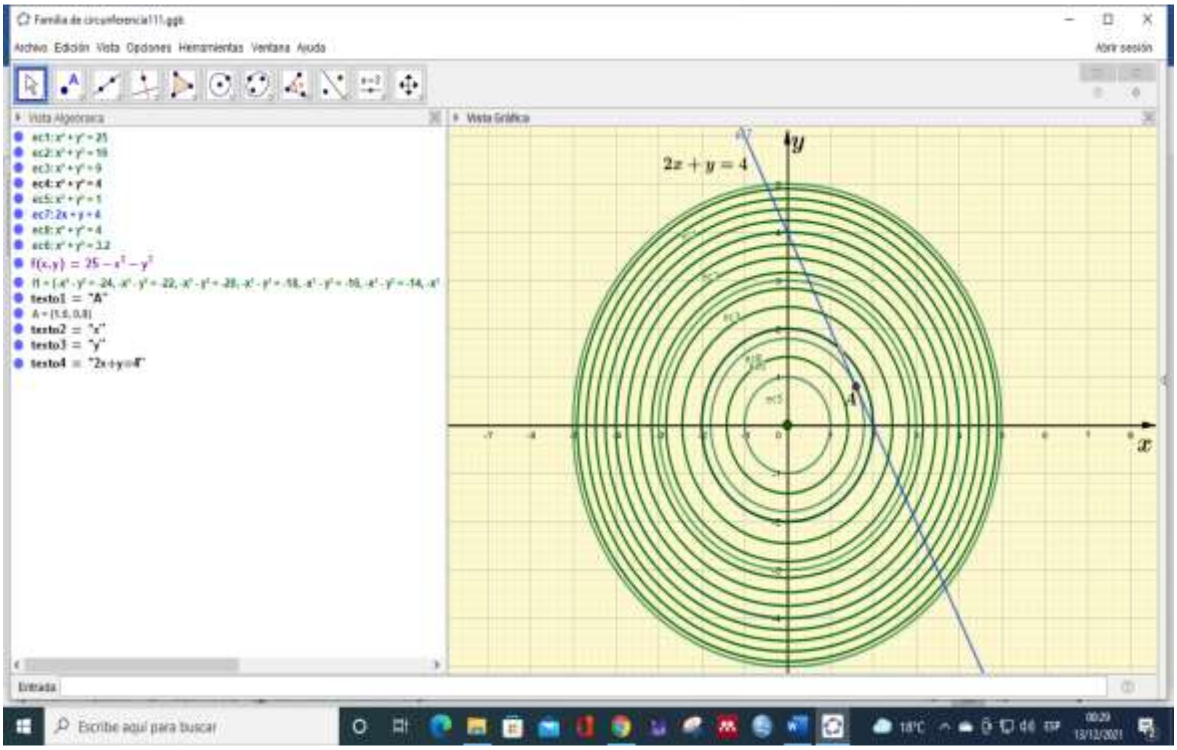


Figura 26

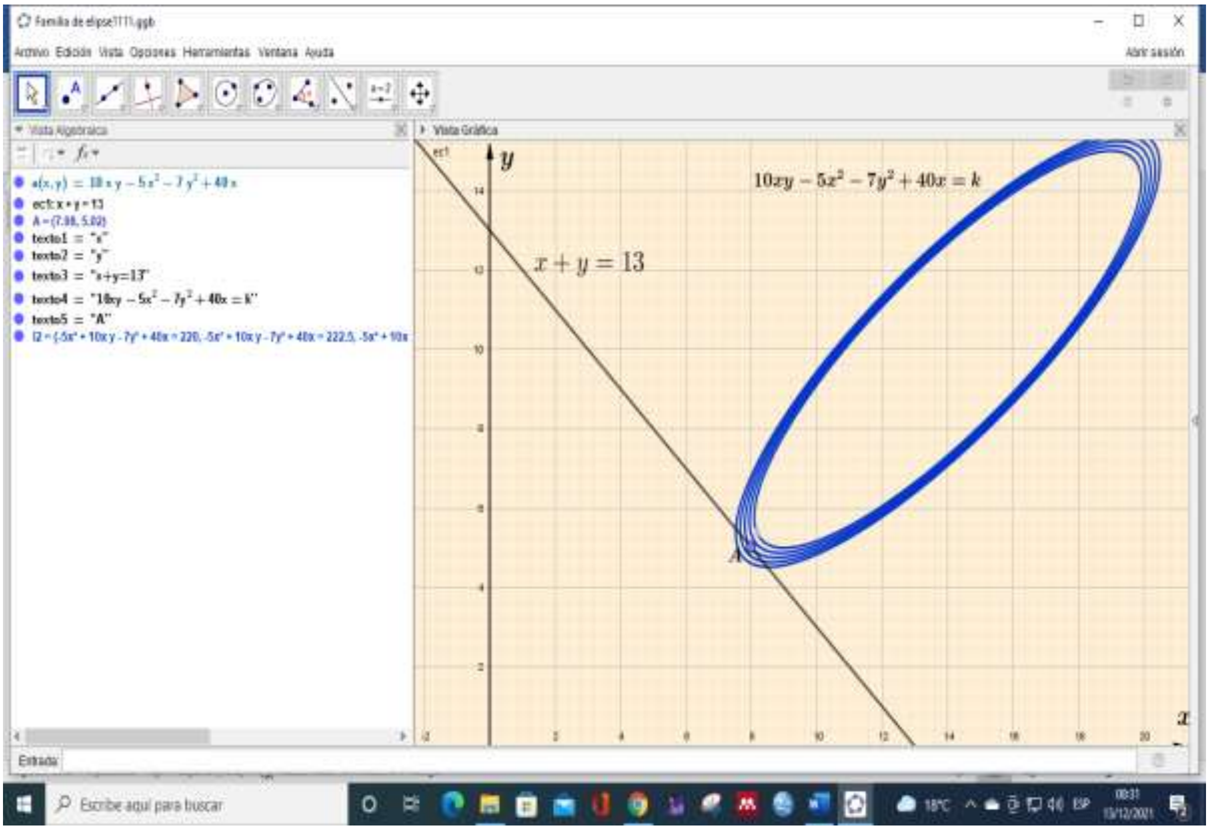


Figura 28

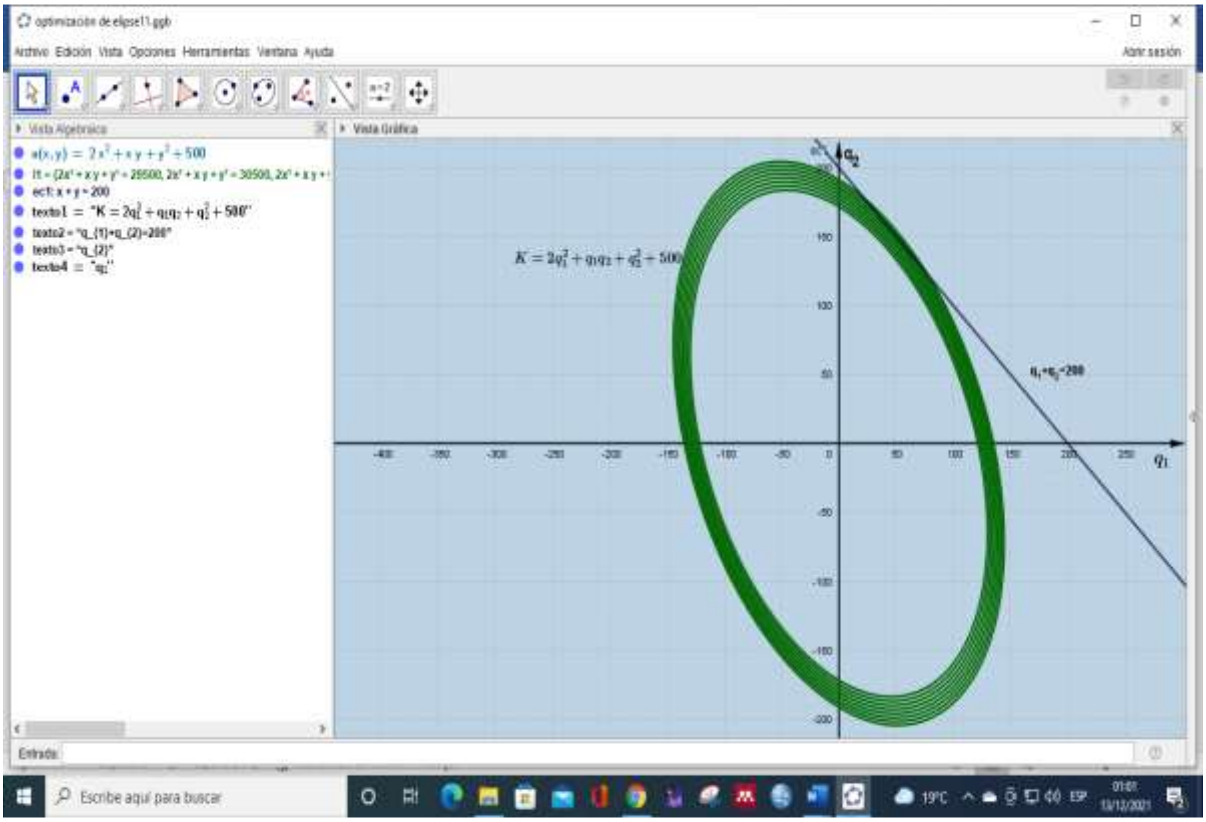


Figura 29

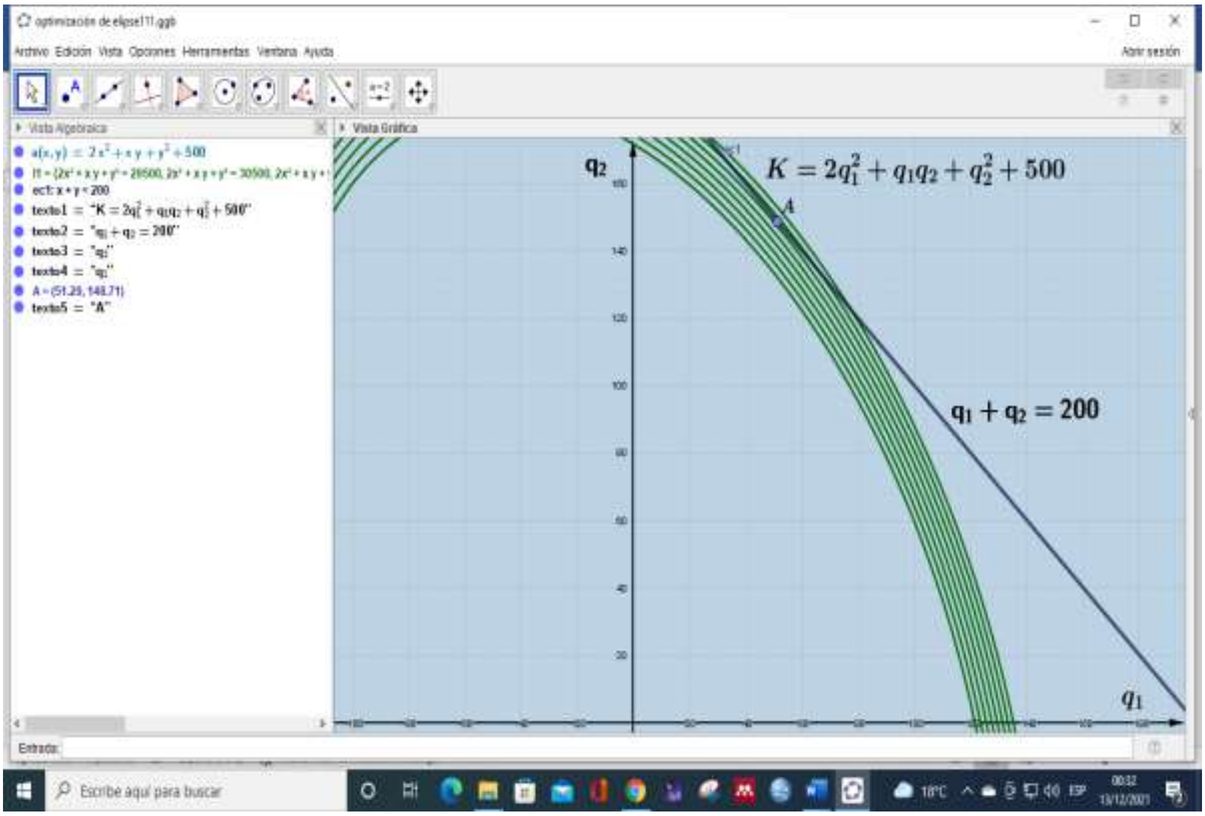
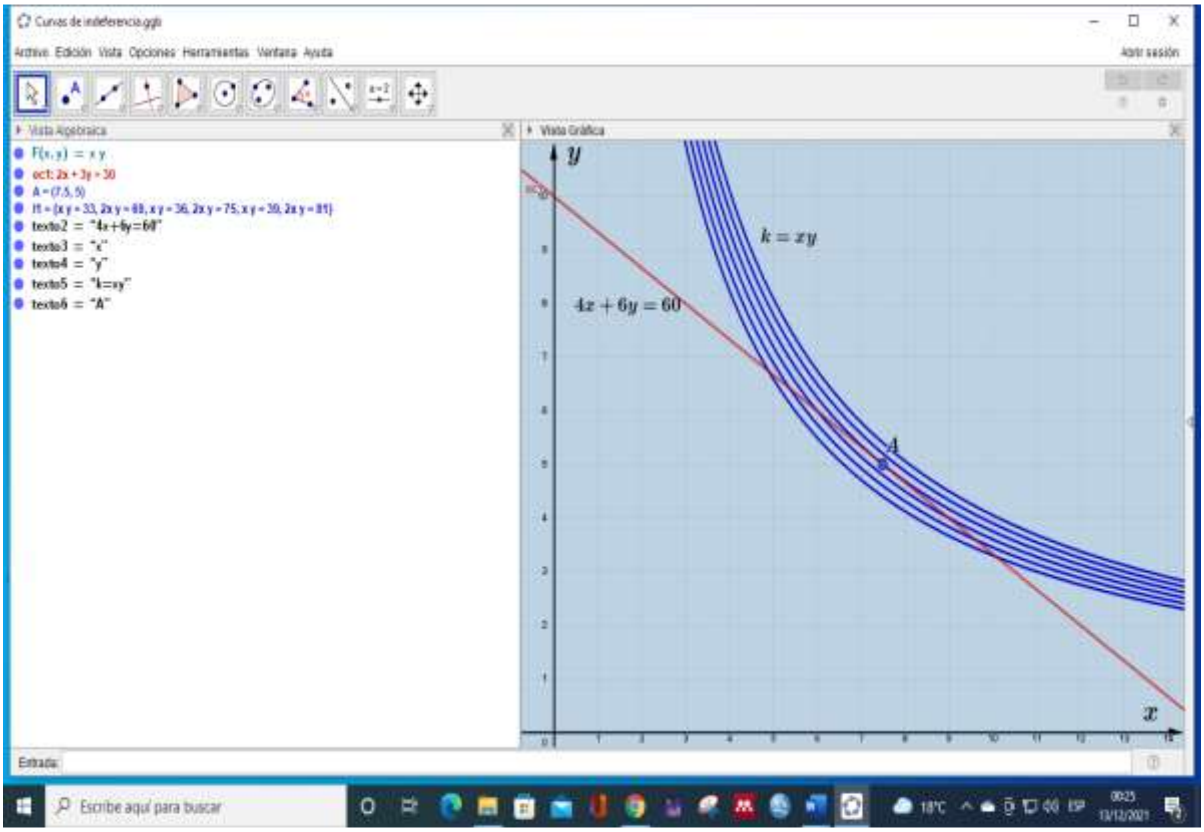


Figura 30



Curvas de indiferencia.ggb
Archivo Edición Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión
Vista Algebraica
Vista Gráfica
k = xy
4x + 6y = 60
A
Entrada:
Escribe aquí para buscar